

Máster Universitario en Ingeniería de Telecomunicación  
2022-2023

*Trabajo Fin de Máster*

# “Estudio de las Prestaciones de un Radar Cuántico”

---

Isabel Carnoto Amat

Tutor/es

Luis Enrique García Muñoz

Leganés, marzo de 2023



*[Incluir en el caso del interés de su publicación en el archivo abierto]*

Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento  
– No Comercial – Sin Obra Derivada**



## RESUMEN

En la última década ha crecido significativamente el interés por tratar de explotar los fenómenos cuánticos con el fin de aumentar el rendimiento de una gran variedad de tecnologías clásicas. Una aplicación que está despertando particular interés es el radar cuántico. Este está basado normalmente en el protocolo de detección cuántica llamado *quantum illumination*, fundamentado en la propiedad de entrelazamiento cuántico. Este promete superar las prestaciones de los radares clásicos en aspectos como aumentar la sensibilidad, superar el problema de alcance de los radares clásicos, aumentar la robustez frente al *jamming* y mejorar la detección de objetos con muy baja reflectividad como los *stealth vehicles*.

El objetivo principal de este trabajo es hacer un estudio teórico de un sistema de detección de objetivos, a frecuencias ópticas, basado en el protocolo *quantum illumination*, y realizar simulaciones bajo distintos escenarios con el fin de evaluar las prestaciones del sistema.

Para lograr este objetivo se estudió el estado del arte actual, se calcularon las expresiones matemáticas de los estados cuánticos y matrices de covarianza del sistema, y se realizaron simulaciones con las que se comparó la probabilidad de error de detección de los sistemas clásico y cuántico al variar parámetros como la reflectividad del blanco o el número promedio de fotones de la señal de sondeo.

Se ha observado que en el régimen de señal de baja potencia el uso de un radar cuántico permite una reducción de la probabilidad de error, con respecto al sistema clásico, pero esta ventaja se vuelve cada vez menos relevante a medida que aumenta el número de fotones de señal. Pese a que existen limitaciones para su implementación el radar cuántico es un ejemplo de un sistema de detección basado en entrelazamiento que brinda una ventaja sobre un sistema clásico, aun cuando el entrelazamiento inicial se destruye debido a las condiciones ambientales adversas que se pueden presentar normalmente a frecuencias de microondas, como altas pérdidas y fuerte ruido térmico.

**Palabras clave:** radar, cuántico, entrelazamiento, correlación, detección.





## ABSTRACT

Over the last decade, interest has grown significantly in trying to exploit quantum phenomena to increase the performance of a wide variety of classical technologies. One application that is attracting particular interest is quantum radar. This is typically based on the quantum detection protocol called quantum illumination, which is based on the property of quantum entanglement. It promises to outperform classical radars in aspects such as increasing sensitivity, overcoming the range problem of classical radars, increasing robustness against jamming and improving the detection of objects with very low reflectivity such as stealth vehicles.

The main objective of this work is to make a theoretical study of a target detection system, at optical frequencies, based on the quantum illumination protocol, and to perform simulations under different scenarios in order to evaluate the performance of the system.

To achieve this goal, the current state of the art was studied, the mathematical expressions of the quantum states and covariance matrices of the system were calculated, and simulations were performed to compare the probability of detection error of the classical and quantum systems when varying parameters such as the reflectivity of the target or the average number of photons in the probe signal.

It has been observed that in the low-power signal regime the use of a quantum radar allows a reduction of the probability of error, with respect to the classical system, but this advantage becomes less and less relevant as the number of signal photons increases. Although there are limitations to its implementation, quantum radar is an example of a detection system based on entanglement that provides an advantage over a classical system, even if the initial entanglement is destroyed due to the adverse environmental conditions that can normally occur at microwave frequencies, such as high losses and strong thermal noise.

**Keywords:** radar, quantum, entanglement, correlation, detection.



## AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a mis padres por impulsarme a ser mejor cada día y por estar siempre cerca a pesar de la distancia, a Caro y a Nacho por ser mis segundos padres y siempre preocuparse por mí, a Amelia y a Eva por el cariño infinito, a Raque por apoyarme en todo, a Sav por creer siempre en mí, y a Rai por siempre darme ánimos.

También quiero agradecer a los increíbles amigos que la Carlos III me ha dado: a Paula por las fotos del desayuno, a Mária por las risas y las bicis, a Guille por el tenis y los ColaCao, a Alex por los trasnochos, a Marta por Cartagena, a Javi por El Chepi, a Dulce por la energía infinita y a Pablo por los brindis.

Por último, quiero agradecer a mi tutor Quique y a Isdefe, por la oportunidad y el apoyo económico.



# ÍNDICE GENERAL

|  |    |
|--|----|
| 1. MOTIVACIÓN .....  | 1  |
| 1.1. Los ordenadores cuánticos .....   | 1  |
| 1.2. La criptografía cuántica.....   | 2  |
| 1.3. Los sensores cuánticos .....  | 2  |
| 2. INTRODUCCIÓN .....  | 5  |
| 2.1. Objetivos .....   | 5  |
| 2.2. Marco Regulador .....   | 6  |
| 2.2.1. Banda de radar HF y VHF .....   | 6  |
| 2.2.2. Banda de radar UHF .....  | 7  |
| 2.2.3. Banda de radar L.....   | 7  |
| 2.2.4. Banda de radar S.....   | 7  |
| 2.2.5. Banda de radar C .....  | 7  |
| 2.2.6. Banda de radar X .....  | 7  |
| 2.2.7. Banda de radar K .....  | 8  |
| 2.2.8. Banda de Radar V .....  | 8  |
| 2.2.9. Banda de radar W .....  | 8  |
| 2.2.10. Banda de radar N .....   | 8  |
| 2.2.11. Límites de emisiones electromagnéticas en frecuencias de radio y<br>microondas ..... | 9  |
| 2.2.12. Límites de emisiones electromagnéticas en frecuencias ópticas ...                    | 11 |
| 2.3. Contenido de la memoria.....  | 13 |
| 2.4. Estado del Arte .....   | 14 |
| 2.5. Introducción teórica.....   | 18 |
| 2.5.1. Nociones de mecánica cuántica .....   | 18 |
| 2.5.2. Postulados de la mecánica cuántica .....  | 19 |
| 2.5.3. El entorno .....  | 19 |
| 2.5.4. Estados puros y mixtos.....   | 22 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| 2.5.5.    | Evolución temporal.....  | 23 |
| 2.5.6.    | Medidas cuánticas.....   | 24 |
| 2.5.7.    | Sobre los operadores lineales.....   | 25 |
| 2.5.8.    | Sobre los conjugados hermíticos.....   | 25 |
| 2.5.9.    | Los principios.....  | 26 |
| 2.5.10.   | Ejemplo de una medida cuántica.....  | 26 |
| 2.5.11.   | La trampa.....   | 27 |
| 2.5.12.   | Valor esperado.....  | 27 |
| 2.5.13.   | Cuantización del campo electromagnético .....                                      | 28 |
| 2.5.14.   | Distribución del espacio de fases y estados gaussianos.....                        | 33 |
| 2.5.15.   | Función de Wigner .....  | 33 |
| 2.5.16.   | Estados coherentes.....  | 34 |
| 2.5.17.   | Estado térmico.....  | 35 |
| 2.5.18.   | Estados comprimidos o <i>squeezed states</i> .....                                 | 36 |
| 2.5.19.   | Estados two-mode squeezed vacuum (TMSV).....                                       | 36 |
| 2.5.20.   | Radar clásico vs radar cuántico.....   | 38 |
| 2.5.21.   | Quantum illumination .....   | 39 |
| 2.5.22.   | Diagrama de bloques del radar cuántico basado en <i>quantum illumination</i> ..... | 39 |
| 2.5.23.   | Transmisor.....  | 40 |
| 2.5.24.   | Canal e interacción con el blanco .....  | 42 |
| 2.5.24.1. | Hipótesis <b>H0</b> : Blanco ausente.....  | 42 |
| 2.5.24.2. | Hipótesis <b>H1</b> : Blanco presente.....   | 44 |
| 2.5.25.   | Sobre el ruido térmico.....  | 45 |
| 2.5.26.   | Relación señal a ruido (SNR) .....   | 46 |
| 2.5.27.   | Discriminación entre hipótesis .....   | 46 |
| 2.5.28.   | Receptor. Optical parametric amplifier (OPA).....                                  | 50 |
| 2.5.29.   | Probabilidad de error.....   | 54 |
| 2.5.30.   | Sistema óptico vs. Sistema en microondas.....                                      | 55 |
| 2.5.31.   | Limitaciones.....  | 55 |

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| 2.5.31.1. | Régimen de baja potencia.....   | 55 |
| 2.5.31.2. | Producto time-bandwidth M .....   | 56 |
| 2.5.31.3. | Hardware .....  | 56 |
| 3.        | DESARROLLO.....   | 57 |
| 3.1.      | Parámetros iniciales.....   | 58 |
| 3.2.      | Parámetros de entrada .....   | 59 |
| 3.3.      | Parámetros de salida (resultados).....  | 59 |
| 3.4.      | Definición de los operadores de cuadratura .....  | 60 |
| 3.5.      | Estado two-mode squeezed vacuum.....  | 60 |
| 3.6.      | Código de la hipótesis <b>H0</b> .....  | 60 |
| 3.7.      | Código de la hipótesis <b>H1</b> .....  | 61 |
| 3.8.      | Receptor OPA .....  | 61 |
| 3.9.      | Probabilidades de error. Método de Montecarlo.....  | 62 |
| 3.10.     | Comparación de las gráficas teóricas con las simuladas .....  | 63 |
| 4.        | RESULTADOS.....   | 65 |
| 4.1.      | Comprobación del comportamiento de las curvas teóricas.....   | 66 |
| 4.2.      | Comprobación de la aproximación Gaussiana del receptor OPA.....   | 71 |
| 4.3.      | Validación de los procesos implementados en el sistema de radar cuántico a partir de la comparación de las matrices de covarianza obtenidas con las teóricas..... | 75 |
| 4.4.      | Comparación de las curvas teóricas de la probabilidad de error con las obtenidas a partir del método de Montecarlo para distintos valores de $N_S$ . ...          | 79 |
| 4.5.      | Observación del comportamiento de las curvas teóricas de probabilidad de error ante una variación de la reflectividad del blanco $\kappa$ .....                   | 83 |
| 5.        | CONCLUSIONES.....   | 85 |
| 5.1.      | Objetivos cumplidos .....   | 85 |
| 5.2.      | Mejoras.....  | 87 |
| 5.3.      | Trabajos futuros.....   | 87 |
| 6.        | METODOLOGÍA Y PRESUPUESTO .....   | 89 |
| 6.1.      | Metodología.....  | 89 |

|                   |  |     |
|-------------------|--|-----|
| 6.1.1.            | Paquete de trabajo 0 (WP0): Gestión.....                     | 89  |
| 6.1.2.            | Paquete de trabajo 1 (WP1): Estudio de la bibliografía ..... | 89  |
| 6.1.3.            | Paquete de trabajo 2 (WP2): Diseño del sistema.....          | 90  |
| 6.1.4.            | Paquete de trabajo 3 (WP3): Desarrollo matemático .....      | 90  |
| 6.1.5.            | Paquete de trabajo 4 (WP4): Implementación en MATLAB.....    | 91  |
| 6.1.6.            | Paquete de trabajo 5 (WP5): Evaluación y conclusiones .....  | 91  |
| 6.2.              | Cronograma de ejecución de los paquetes de trabajo.....      | 91  |
| 6.3.              | Presupuesto .....  | 92  |
| 6.3.1.            | Coste del personal.....                                      | 92  |
| 6.3.2.            | Coste de los materiales.....                                 | 93  |
| 6.3.3.            | Presupuesto total.....                                       | 93  |
| REFERENCIAS ..... |  | 95  |
| ANEXOS.....       |  | 99  |
| Anexo A. ....     |  | 99  |
| Anexo B. ....     |  | 100 |
| Anexo C. ....     |  | 101 |



## ÍNDICE DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Fig 2.1. Frecuencias a las que funcionan distintas aplicaciones radar [5].....  | 6  |
| Fig 2.2. Límites de emisiones electromagnéticas según el ICNIRP y el CENELEC para frecuencias por debajo de los 300 GHz [7]. ....   | 11 |
| Fig 2.3. Límites de las emisiones electromagnéticas en el rango de las frecuencias de infrarrojo [8].....   | 12 |
| Fig 2.4. Componentes vectoriales de un vector de N dimensiones [18]. ....   | 20 |
| Fig 2.5. Relación entre componentes vectoriales y una función continua [18]....   | 21 |
| Fig 2.6. Los seis niveles de energía más bajos de un oscilador armónico cuántico [20].....  | 31 |
| Fig 2.7. Distribuciones de Wigner de un estado de vacío $ 0\rangle$ y un estado coherente $ \alpha\rangle$ con $\alpha = 4 + 4i$ .....  | 35 |
| Fig 2.8. Distribución de Wigner de un estado térmico $\rho_T$ con número promedio de fotones $NT = 3$ . ....  | 36 |
| Fig 2.9. Marginales de la función de Wigner de un estado <i>two-mode squeezed vacuum</i> con número promedio de fotones $Ns = 3$ . La fila superior muestra la distribución de las cuadraturas $q$ y $p$ de cada uno de los modos. La fila inferior muestra la correlación entre los modos..... | 38 |
| Fig 2.10. Diagrama de bloques del radar cuántico.....   | 39 |
| Fig 2.11. Uso de un <i>beamsplitter</i> para crear el estado TMSV. Los dos modos de salida están entrelazados. ....   | 41 |
| Fig 2.12. Diagrama de las hipótesis de detección de <i>quantum illumination</i> . Izquierda, $H0$ : blanco ausente. Derecha, $H1$ : blanco presente.....  | 42 |
| Fig 2.13. Representación de la interacción del modo <i>signal</i> con el blanco. ....   | 44 |
| Fig 2.14. Límites superiores de la probabilidad de error del sistema clásico (azul) y cuántico (rojo) y límite inferior del sistema clásico (negro) en función del número de copias $M$ del estado TMSV, para $Ns = 0.01$ [14]. ....  | 48 |
| Fig 2.15. Límites superiores de la probabilidad de error del sistema clásico (azul) y cuántico (rojo) y límite inferior del sistema clásico (negro) en función del número de copias $M$ del estado TMSV para un $Ns = 1$ [14].....  | 49 |

|  |    |
|--|----|
| Fig 2.16. Límites superiores de la probabilidad de error de detección de un radar cuántico basado en entrelazamiento (línea sólida), uno clásico basado en estados coherentes (línea de guiones) y uno clásico descrito por las fórmulas de Albersheim (línea punteada) en función de la SNR en dB [24]..... | 50 |
| Fig 2.17. Representación esquemática del receptor OPA.....   | 51 |
| Fig 2.18. Límites superiores de la probabilidad de error del sistema clásico (azul) y cuántico (rojo), y probabilidad de error del receptor OPA (verde) [14].....  | 53 |
| Fig 2.19. Representación del decisor de umbral de la aproximación Gaussiana del OPA. ....  | 54 |
| Fig 3.1. Ejemplo de las gráficas que se obtienen como resultado de la ejecución del programa.....  | 59 |
| Fig 4.1. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.1. ....   | 66 |
| Fig 4.2. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.2. ....   | 67 |
| Fig 4.3. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.3. ....   | 68 |
| Fig 4.4. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.4. ....   | 69 |
| Fig 4.5. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.5. ....  | 71 |
| Fig 4.6. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.6. ....  | 72 |
| Fig 4.7. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.7. ....  | 73 |
| Fig 4.8. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.8. ....  | 74 |
| Fig 4.9. Matriz de covarianza del estado TMSV devuelta para los valores de la tabla 4.9.....   | 75 |

|   |    |
|---|----|
| Fig 4.10. Matriz de covarianza del estado cuántico de la hipótesis $H_0$ devuelta por el programa desarrollado.....   | 76 |
| Fig 4.11. Matriz de covarianza del estado cuántico de la hipótesis $H_1$ devuelta por el programa desarrollado.....   | 77 |
| Fig 4.12. Izquierda, límites superiores e inferiores de la probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico. Derecha, comparación de la probabilidad de error obtenida con el método de Montecarlo (negro) y la de la aproximación Gaussiana del receptor OPA. Según los valores de la tabla 4.10. .... | 79 |
| Fig 4.13. Probabilidades de error obtenidas a través del método de Montecarlo con comparación con la aproximación Gaussiana del receptor OPA. ....  | 80 |
| Fig 4.14. Probabilidades de error más bajas que puede alcanzarse con el método de Montecarlo para los parámetros establecidos en la tabla 4.10.....   | 80 |
| Fig 4.15. Izquierda, límites superiores e inferiores de la probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico. Derecha, comparación de la probabilidad de error obtenida con el método de Montecarlo (negro) y la de la aproximación Gaussiana del receptor OPA. Según los valores de la tabla 4.11. .... | 81 |
| Fig 4.16. Izquierda, límites superiores e inferiores de la probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico. Derecha, comparación de la probabilidad de error obtenida con el método de Montecarlo (negro) y la de la aproximación Gaussiana del receptor OPA. Según los valores de la tabla 4.12. .... | 82 |
| Fig 4.17. Comparación de los límites de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error teórica del OPA, en función de la SNR y según los parámetros de la tabla 4.13. ....   | 83 |
| Fig 6.1. Cronograma de paquetes de trabajo.....   | 91 |
| Fig 6.2. Leyenda del cronograma de paquetes de trabajo.....   | 92 |

## ÍNDICE DE TABLAS

|  |    |
|--|----|
| TABLA 4.1. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 1 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS. ....                                   | 66 |
| TABLA 4.2. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 2 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS. ....                                   | 67 |
| TABLA 4.3. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 3 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS. ....                                   | 68 |
| TABLA 4.4. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 4 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS. ....                                   | 69 |
| TABLA 4.5. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 1 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.....                 | 71 |
| TABLA 4.6. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 2 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.....                 | 72 |
| TABLA 4.7. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 3 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.....                 | 72 |
| TABLA 4.8. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 4 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.....                 | 73 |
| TABLA 4.9. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN DE VALIDACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA.....                         | 75 |
| TABLA 4.10. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 1 UTILIZANDO EL MÉTODO DE MONTECARLO .....                                 | 79 |
| TABLA 4.11. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 2 UTILIZANDO EL MÉTODO DE MONTECARLO. ....                                 | 81 |
| TABLA 4.12. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 3 UTILIZANDO EL MÉTODO DE MONTECARLO .....                                 | 81 |
| TABLA 4.13. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN DE OBSERVACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR AL VARIAR LA REFLECTIVIDAD..... | 83 |
| TABLA 6.1. COSTE DEL PERSONAL.....   | 93 |
| TABLA 6.2. COSTE DE LOS MATERIALES. ....   | 93 |

# 1. MOTIVACIÓN

La motivación que llevó a la realización de este trabajo puede dividirse en dos.

En primer lugar se encuentra el interés de la empresa Isdefe (Ingeniería de Sistemas para la Defensa de España) por las tecnologías cuánticas. Desde hace casi cuatro años he estado trabajando dentro de la Cátedra UC3M-ISDEFE Espacio, la cual fue creada con la intención de estudiar los avances de las tecnologías cuánticas y valorar su aplicabilidad a futuro en el ámbito de la defensa y la seguridad.

Dentro de este proyecto he tenido la oportunidad de estudiar temas como comunicaciones y criptografía cuánticas, indagando en las posibilidades y ventajas que tendría dar un salto hacia estas tecnologías en comparación con las que se utilizan actualmente.

La tecnología que más recientemente se ha estudiado dentro de este proyecto son los sistemas de detección que utilizan propiedades de la mecánica cuántica, como por ejemplo, el radar cuántico.

De este surge la segunda motivación de este trabajo: las posibilidades tecnológicas que podrían alcanzarse con la implementación de esta tecnología.

En la última década ha crecido significativamente el interés por tratar de explotar los fenómenos cuánticos para aumentar el rendimiento de una gran variedad de tecnologías clásicas de procesamiento de información. Esto se debe a que el uso de estos fenómenos permite aumentar el desempeño de las tecnologías que se usan actualmente. A continuación, se muestran algunos ejemplos:

## 1.1. Los ordenadores cuánticos

Buscan explotar el principio cuántico de superposición para superar las capacidades de los ordenadores clásicos. Este principio se aplica a los qubits, el equivalente cuántico del bit, y expone que a diferencia de un bit tradicional, el cual puede estar en solo un estado a la vez, 0 o 1, el qubit puede estar en una superposición de 0 y 1. Esto permite que los ordenadores cuánticos puedan resolver ciertos problemas cientos de millones de veces más rápido que los ordenadores tradicionales [1].

## 1.2. La criptografía cuántica

Para el desarrollo de la criptografía cuántica se han explotado varios fenómenos de la mecánica cuántica como, por ejemplo:

- **La verdadera aleatoriedad.** Los generadores de números aleatorios actuales están basados en algoritmos, por lo que solo dan como resultado cadenas pseudoaleatorias de bits. La física cuántica hace posible la verdadera aleatoriedad, por ejemplo, un único fotón es reflejado o transmitido por un divisor de haz de forma completamente arbitraria o un fotón polarizado en diagonal pasa o es bloqueado por un filtro vertical con un 50% de probabilidad.
- **Medida no pasiva.** La monitorización pasiva de señales desconocidas transmitidas se encuentra prohibida en la mecánica cuántica debido a que los procesos de medida no son procesos pasivos ni externos. Un espía que intenta robar información sobre estados cuánticos causará casi siempre alteraciones en las señales cuánticas transmitidas que son detectables [2].
- **Entrelazamiento cuántico.** O "acción espeluznante a distancia", como la llamó Einstein, es un fenómeno de la mecánica cuántica que contradice nuestra intuición. Dos partículas entrelazadas, por ejemplo, dos fotones, tienen características correlacionadas que se conservan incluso cuando las dos están separadas entre sí. Y cuando se mide el estado de una de las partículas, el estado de la otra queda determinado instantáneamente [1]. Este fenómeno se reduce al hecho de que no se puede extraer información de una de las partículas sin perturbar a la otra. La máxima información que se puede extraer del sistema es la información conjunta de ambas partículas. Este fenómeno no tiene ningún análogo desde una perspectiva clásica.

Estas tres propiedades permiten establecer claves de cifrado teóricamente seguras a través del uso de protocolos de distribución de claves cuánticas.

## 1.3. Los sensores cuánticos

Se han producido avances en el desarrollo de sensores y protocolos de detección cuánticos, los cuales explotan el principio del entrelazamiento cuántico para aumentar su sensibilidad [3].

En particular, ha surgido un gran interés en la posibilidad de desarrollar un radar cuántico, ya que parece que explotando la propiedad del entrelazamiento este podría superar el desempeño del radar clásico.

Antes de continuar es importante hacer una distinción entre tres conceptos que son diferentes, pero que normalmente se usan indistintamente. Estos términos son detección cuántica de objetivos, *quantum illumination* y radar cuántico.

La detección cuántica de objetivos es cualquier protocolo que utilice algún aspecto de la mecánica cuántica para realizar la tarea de detección de blancos. Es decir, dada una región de interés, determinar si un objetivo está presente o no. La parte cuántica puede residir en cualquier parte del protocolo, ya sea la fuente utilizada para sondear la región objetivo o el receptor utilizado para tomar decisiones.

*Quantum illumination* (QI) o iluminación cuántica, constituye un subconjunto particular de protocolos cuánticos de detección de objetivos basados en el entrelazamiento. En QI, la señal que sondea el blanco está entrelazada con una señal de referencia en el receptor, de modo que cuando se produce la toma de decisiones sobre la existencia de dicho blanco, el receptor “conoce”, a través del entrelazamiento, información adicional sobre lo que le ha ocurrido a la señal durante su propagación.

Por último, el radar cuántico se refiere a la aplicación específica de algunos protocolos cuánticos de detección de blancos en el ámbito de las microondas. Esta aplicación reviste un interés particular, ya que la ventaja potencial de la detección que ofrece el QI es máxima cuando hay mucho ruido presente, un régimen que se produce de forma natural en las microondas debido al fondo cósmico de microondas.

El radar cuántico es una forma de detección cuántica que ha sido objeto de gran atención en los últimos años [4]. Propuesto inicialmente basado en *quantum illumination*, promete superar las prestaciones de los radares clásicos sobre todo en circunstancias en las que las capacidades del radar clásico se sabe que son limitadas a través de explotar las ventajas que el entrelazamiento puede brindar, a continuación se nombran algunas de estas:

- Lograr la detección de objetivos con una mayor precisión y sensibilidad.
- Superar el problema de alcance de detección de los radares clásicos (ya que una de las principales ventajas del radar cuántico es poder detectar señales

débiles las cuales, en el caso clásico, quedarían enmascaradas por el ruido térmico) [4].

- Incrementar la robustez contra ataques basados en interferencias y contramedidas como el *jamming*.
- Permitir la detección de objetos con muy baja reflectividad como son los llamados objetivos sigilosos o *stealth vehicles* [3].

El gran interés que hay actualmente por esta tecnología y los grandes avances que podrían lograrse si se implementase físicamente (detección de objetos sigilosos, mayor resistencia al *jamming*, detección de *space debris* y objetos pequeños, imágenes médicas, sensores sumamente sensibles) conforman la motivación para la realización de este trabajo.



## 2. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se comentan los objetivos de este trabajo, el marco regulador, el contenido de la memoria, el estado del arte actual y una introducción teórica con una serie de conceptos que son necesarios para entender el desarrollo y los resultados de este trabajo.

### 2.1. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es hacer un estudio teórico de un sistema de detección de objetivos, a frecuencias ópticas, basado en tecnologías cuánticas, en particular en el protocolo llamado *quantum illumination* fundamentado en la propiedad cuántica del entrelazamiento, y realizar simulaciones bajo distintos escenarios con el fin de evaluar las prestaciones del sistema.

El objetivo secundario es mostrar con mayor detalle los desarrollos matemáticos necesarios para entender las simulaciones realizadas, con el fin de rellenar el vacío que hay de descripciones detalladas en la literatura actual sobre el tema.

Para lograr estos se plantean los siguientes objetivos parciales:

1. Estudiar la literatura disponible y el estado del arte actual de los sistemas de detección basados en tecnologías cuánticas.
2. Plantear el diseño del sistema de detección (transmisión, interacción con el medio y el blanco, y recepción), considerando frecuencias ópticas y dispositivos y procesos que son implementables actualmente.
3. Realizar simulaciones, utilizando el método de Montecarlo, bajo distintos escenarios para obtener las prestaciones del sistema
4. Comparar los resultados obtenidos con la bibliografía actual para definir las ventajas y limitaciones del sistema.

## 2.2. Marco Regulador

Actualmente, las frecuencias utilizadas en los distintos sistemas de radar varían entre 5 MHz y 130 GHz. Estas se dividen en bandas más pequeñas para ser utilizadas en aplicaciones específicas, como se muestra en la figura 2.1.

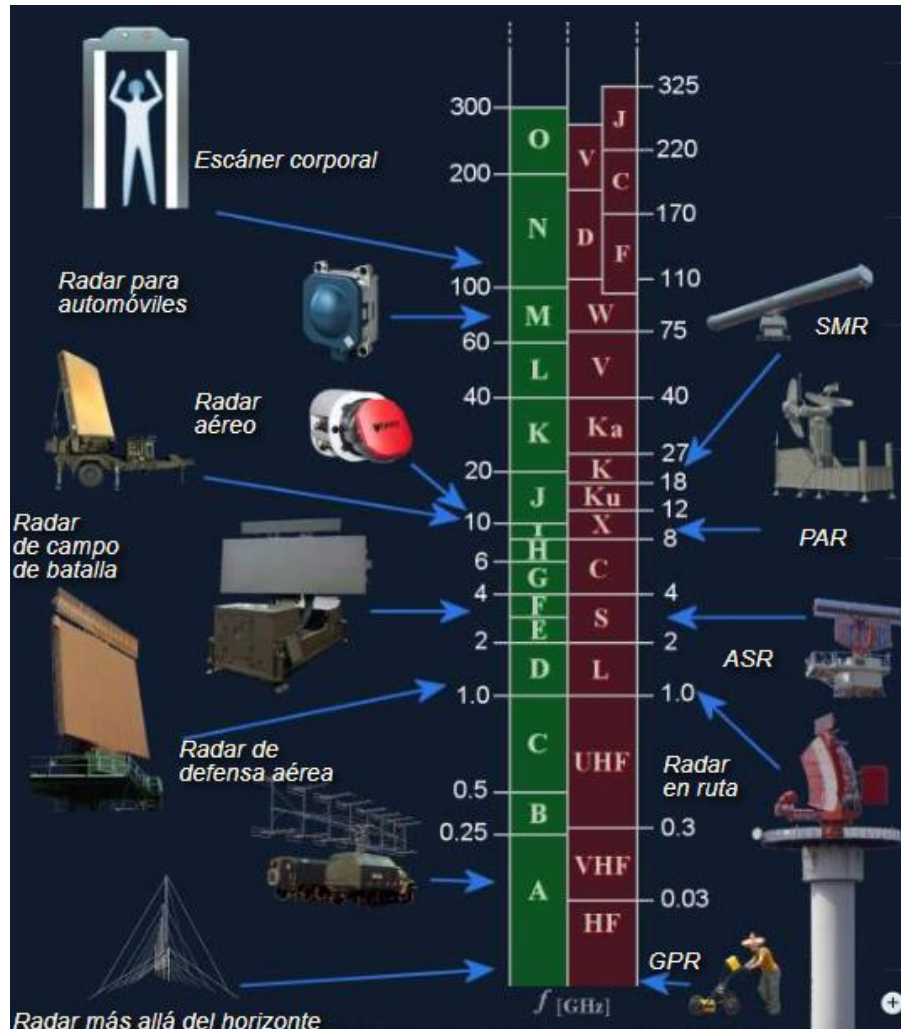


Fig 2.1. Frecuencias a las que funcionan distintas aplicaciones radar [5].

### 2.2.1. Banda de radar HF y VHF

Estas bandas de radar por debajo de 300 MHz tienen una larga tradición, ya que los primeros aparatos de radar se desarrollaron en estas durante la 2ª Guerra Mundial. Se utilizaron como radares de alerta temprana de alcance extremadamente largo, los llamados radares *Over The Horizon* (OTH). Estos radares no son capaces de cumplir requisitos de alta precisión y requieren antenas sumamente grandes.

### **2.2.2. Banda de radar UHF**

En esta banda de frecuencias (300 MHz a 1 GHz) se han desarrollado radares especializados para aplicaciones militares, como radares de alerta temprana, o para observación meteorológica, como perfiladores de viento. Estas frecuencias permiten un largo alcance ya que se amortiguan muy poco por los fenómenos meteorológicos y atmosféricos.

### **2.2.3. Banda de radar L**

Este rango de frecuencias (1 a 2 GHz) es idóneo para los radares de vigilancia aérea de largo alcance hasta una distancia de  $\approx 400$  km. Las interferencias relativamente bajas de los servicios civiles de radiocomunicación permiten una radiación de banda ancha con una potencia muy elevada. En esta banda de frecuencias funcionan los radares de vigilancia de rutas aéreas para el control del tráfico aéreo.

### **2.2.4. Banda de radar S**

En este rango de frecuencias (2 a 4 GHz) la atenuación atmosférica es mayor que en las bandas anteriores por lo que se necesita más potencia para lograr un mayor alcance. En esta banda también comienzan a verse deficiencias considerables debido a condiciones meteorológicas, por lo que se suelen utilizar en zonas con climas tropicales.

Estos se utilizan también como radares especiales de vigilancia en aeropuertos para detectar la posición de aviones en áreas cercanas a la terminal  $\approx 100$  km y para detectar las condiciones meteorológicas en las proximidades de aeródromos militares y civiles.

### **2.2.5. Banda de radar C**

Esta banda de frecuencias (4 a 8 GHz) se utiliza en radares militares móviles de campo de batalla de corto y medio alcance. Las antenas son lo suficientemente pequeñas como para ser instaladas rápidamente con gran precisión. En estas frecuencias la influencia de las condiciones meteorológicas es muy grande.

### **2.2.6. Banda de radar X**

Esta banda (8 a 12 GHz) se utiliza principalmente en aplicaciones civiles y militares para los sistemas de radar de navegación marítima. Las antenas

pequeñas, baratas y de rotación rápida ofrecen alcances suficientes con muy buena precisión.

Esta también se utiliza en los radares de imágenes espaciales tanto para inteligencia militar como para cartografía geográfica civil.

#### **2.2.7. Banda de radar K**

Este rango de frecuencias (12 a 40 GHz) se utiliza en aplicaciones como radares de movimiento de superficie o equipos de detección de superficie en aeropuertos. Debido al aumento en la frecuencia, la atenuación en la atmósfera aumenta, sin embargo, también aumenta la precisión posible y la resolución del alcance. Utilizando pulsos sumadamente cortos, se consigue una excelente resolución de alcance, de modo que los contornos de aviones y vehículos pueden observarse en pantalla.

#### **2.2.8. Banda de Radar V**

Debido a la dispersión molecular de la atmósfera a estas frecuencias (40 a 75 GHz), las ondas electromagnéticas sufren una fuerte atenuación. Las aplicaciones de radar se limitan a un alcance de unas pocas decenas de metros.

#### **2.2.9. Banda de radar W**

Estas frecuencias (75 a 110 GHz) se utilizan en aplicaciones como radares de corto alcance en automoción como ayuda al aparcamiento, sistemas de asistencia al frenado y prevención automática de accidentes. También se utilizan en equipos de laboratorio.

#### **2.2.10. Banda de radar N**

En esta banda de frecuencias (100 a 200 GHz) suele utilizarse una frecuencia de 120 GHz en aplicaciones como escáneres de cuerpo completo. Esta aplicación aprovecha el hecho de que estas frecuencias pueden penetrar sustancias secas y no conductoras, pero no pueden penetrar la piel más de unos milímetros [5].

### 2.2.11. Límites de emisiones electromagnéticas en frecuencias de radio y microondas

Las emisiones electromagnéticas son una parte integral de la tecnología moderna y desempeñan un papel fundamental en una amplia gama de aplicaciones, incluidos los sistemas de radar. Si bien estas emisiones tienen muchos usos prácticos, como se ha comentado en epígrafes anteriores, se reconoce ampliamente que una exposición excesiva puede causar efectos negativos en la salud humana y el medio ambiente. Por ejemplo, estudios han demostrado que la exposición prolongada a altos niveles de radiación electromagnética puede aumentar el riesgo de cáncer, daño genético y otros problemas fisiológicos. Además, estas emisiones también pueden interferir con los patrones de migración y el comportamiento de la vida silvestre, causando daños a ecosistemas delicados. A pesar de su importancia en industrias como la aviación y la seguridad nacional, donde los sistemas de radar son fundamentales, es muy importante regular la potencia de estas emisiones para minimizar sus efectos nocivos y garantizar un entorno seguro y saludable para todos. En este contexto, debe lograrse un equilibrio entre los beneficios de la tecnología y la necesidad de limitar la potencia de las emisiones electromagnéticas a niveles aceptables.

Las ondas electromagnéticas interactúan con la materia transfiriendo parte de la energía que transportan. Si la energía no es suficientemente alta como para arrancar un electrón se dice que es radiación no ionizante y por lo tanto no causa daños. En el caso contrario, se dice que es radiación ionizante y es capaz de modificar la estructura de la materia causando daños.

A medida que aumenta la frecuencia de una señal aumenta su energía, por lo que las radiaciones electromagnéticas que se producen a frecuencias bajas se consideran no ionizantes. Dentro de esta categoría se encuentra las frecuencias por debajo de los 300 GHz.

Debido a la necesidad de regular la exposición a estas emisiones distintas organizaciones han realizado estudios, normativas y estándares sobre los límites de exposición a los campos electromagnéticos, como por ejemplo:

**La Organización Mundial de la Salud (OMS)**, que puso en marcha el primer proyecto para estudiar los efectos de los campos electromagnéticos de 0 Hz a 300 GHz.

**La Comisión Internacional para la Protección contra las Radiaciones No-Ionizantes (ICNIRP)**, la cual evalúa el estado de los conocimientos sobre los efectos de la radiación no ionizante sobre la salud humana y presenta recomendaciones sobre la protección frente a esta radiación y los límites de exposición.

Particularmente en Europa existen organismos como el CENELEC (Comité Europeo para la Normalización Electrotécnica) y el ETSI (*European Telecommunications Standards Institute*), que también llevan a cabo estas investigaciones [6].

Para asentar los límites de exposición se usan las siguientes magnitudes físicas:

**Intensidad de campo eléctrico (E)**, es una magnitud vectorial que varía en función de la posición y el tiempo y que se relaciona con la fuerza que se ejerce sobre una carga en reposo cuando esta se ve sometida a la acción de un campo electromagnético. Esta se expresa en voltios por metros (V/m).

**Intensidad de campo magnético (H)**, es una magnitud vectorial que varía en función de la posición y el tiempo y que se relaciona con la fuerza que se ejerce sobre una corriente cuando esta se ve sometida a la acción de un campo electromagnético. Esta se expresa en amperios por metros (A/m).

**Densidad de potencia (S)**, es la potencia por unidad de superficie medida sobre el plano que definen las dos intensidades mencionadas. Esta se calcula a partir del producto de E y H, y se expresa en vatios por metro cuadrado (W/m<sup>2</sup>)

En la figura 2.2 se muestra una tabla sacada del informe sobre emisiones electromagnéticas de los sistemas de telefonía móvil y acceso fijo inalámbrico del Colegio Oficial de Ingenieros de Telecomunicación, en la que se detallan para las distintas frecuencias los límites de emisiones electromagnéticas según el ICNIRP y el CENELEC. En esta figura  $f$  hace referencia a la frecuencia y los valores de intensidad de campo eléctrico y magnético son valores eficaces [7].

|         | Tipo de exposición | Frecuencias      | NIVELES DE REFERENCIA                   |   |  |
|---------|--------------------|------------------|---|---|--|
|         |                    |                  | Intensidad de campo eléctrico (E) (V/m) | Intensidad de campo magnético (H) (A/m) | Densidad de potencia equivalente (S) (W/m <sup>2</sup> ) |
| ICNIRP  | Ocupacional        | 0-1Hz            | --                                      | $1,63 \cdot 10^5$                       | --   |
|         |                    | 1-8Hz            | 20000                                   | $1,63 \cdot 10^5 / f^2$                 | --   |
|         |                    | 8-25Hz           | 20000                                   | $2 \cdot 10^4 / f$                      | --   |
|         |                    | 0,025-0,82kHz    | 500/f                                   | 20/f                                    | --   |
|         |                    | 0,82-65kHz       | 610                                     | 24,4                                    | --   |
|         |                    | 0,065-1MHz       | 610                                     | 1,6/f                                   | --   |
|         |                    | 1-10MHz          | 610/f                                   | 1,6/f                                   | --   |
|         |                    | 10-400MHz        | 61                                      | 0,16                                    | 10   |
|         |                    | 400-2000MHz      | $3 \cdot f^{0.5}$                       | $0,008 \cdot f^{0.5}$                   | f/40   |
|         |                    | 2-300GHz         | 137                                     | 0,36                                    | 50   |
|         | Público en general | 0-1Hz            | --                                      | $3,2 \cdot 10^4$                        | --   |
|         |                    | 1-8Hz            | 10000                                   | $3,2 \cdot 10^4 / f^2$                  | --   |
|         |                    | 8-25Hz           | 10000                                   | 4000/f                                  | --   |
|         |                    | 0,025-0,8kHz     | 250/f                                   | 4/f                                     | --   |
|         |                    | 0,8-3kHz         | 250/f                                   | 5                                       | --   |
|         |                    | 3-150kHz         | 87                                      | 5                                       | --   |
|         |                    | 0,15-1MHz        | 87                                      | 0,73/f                                  | --   |
|         |                    | 1-10MHz          | $87 / f^{0.5}$                          | 0,73/f                                  | --   |
|         |                    | 10-400MHz        | 28                                      | 0,073                                   | 2  |
|         |                    | 400-2000MHz      | $1,375 \cdot f^{0.5}$                   | $0,0037 \cdot f^{0.5}$                  | f/200  |
| CENELEC | Ocupacional        | 2-300GHz         | 61                                      | 0,16                                    | 10   |
|         |                    | 0,01-0,038MHz    | 1000                                    | 42                                      | --   |
|         |                    | 0,038-0,61MHz    | 1000                                    | 1,6/f                                   | --   |
|         |                    | 0,61-10MHz       | 614/f                                   | 1,6/f                                   | --   |
|         |                    | 10-400MHz        | 61,4                                    | 0,16                                    | 10   |
|         |                    | 400-2000MHz      | $3,07 \cdot f^{0.5}$                    | $8,14 \cdot 10^{-3} \cdot f^{0.5}$      | f/40   |
|         |                    | 2000-150000MHz   | 137                                     | 0,364                                   | 50   |
|         | Público en general | 150000-300000MHz | $0,354 \cdot f^{0.5}$                   | $9,4 \cdot 10^{-4} \cdot f^{0.5}$       | $3,334 \cdot 10^{-4} \cdot f$                            |
|         |                    | 0,01-0,042MHz    | 400                                     | 16,8                                    | --   |
|         |                    | 0,042-0,68MHz    | 400                                     | 0,7/f                                   | --   |
|         |                    | 0,68-10MHz       | 275/f                                   | 0,7/f                                   | --   |
|         |                    | 10-400MHz        | 27,5                                    | 0,07                                    | 2  |
|         |                    | 400-2000MHz      | $1,37 \cdot f^{0.5}$                    | $3,64 \cdot 10^{-3} \cdot f^{0.5}$      | f/200  |
|         |                    | 2000-150000MHz   | 61,4                                    | 0,163                                   | 10   |
|         |                    | 150000-300000MHz | $0,158 \cdot f^{0.5}$                   | $4,21 \cdot 10^{-4} \cdot f^{0.5}$      | $6,67 \cdot 10^{-5} \cdot f$                             |

Fig 2.2. Límites de emisiones electromagnéticas según el ICNIRP y el CENELEC para frecuencias por debajo de los 300 GHz [7].

### 2.2.12. Límites de emisiones electromagnéticas en frecuencias ópticas

Para este trabajo serán también relevantes las emisiones a frecuencias ópticas, ya que el sistema de detección planteado funciona en dicho rango. Además, es muy importante estudiar estos límites debido a que una de las aplicaciones posibles para el radar cuántico es la de obtención de imágenes en el ámbito médico, en el que lo ideal es radiar la menor cantidad de energía posible hacia el cuerpo. El rango de frecuencias de interés es el de infrarrojos (300 GHz a 430 THz) ya que la mayoría de las aplicaciones se encuentran en este rango.

En el Real Decreto 486/2010, de 23 de abril, sobre la protección de la salud y la seguridad de los trabajadores contra los riesgos relacionados con la exposición a radiaciones ópticas artificiales se puede encontrar la tabla mostrada en la figura 2.3 en la que se detallan los límites de las emisiones electromagnéticas en el rango de las frecuencias de infrarrojo y el riesgo que suponen para partes del cuerpo en específico.

| Longitud de onda<br>$\lambda$ (nm) | Valor límite (unidades)   |   | Parte del cuerpo/Riesgo                                      |
|------------------------------------|---|---|--|
| 380 – 1400<br>(visible e IRA)      | Para $t > 10$ s<br>$L_R = (2,8 \cdot 10^7) / C_a$ (W/ m <sup>2</sup> ·sr)                                 | Para:<br>$\alpha \leq 1,7$ mrad<br>$C_a = 1,7$    | <b>Ojos:</b> Retina-----quemaduras                           |
|                                    | Para $10 \mu s \leq t \leq 10$ s<br>$L_R = (5 \cdot 10^7) / (C_a \cdot t^{0,25})$ (W/ m <sup>2</sup> ·sr) | $1,7 \leq \alpha \leq 100$ mrad<br>$C_a = \alpha$ |  |
|                                    | Para $t < 10 \mu s$<br>$L_R = (8,89 \cdot 10^8) / C_a$ (W/ m <sup>2</sup> ·sr)                            | $\alpha > 100$ mrad<br>$C_a = 100$                |  |
| 780 – 1400<br>(IRA)                | Para $t > 10$ s<br>$L_R = (6 \cdot 10^6) / C_a$ (W/ m <sup>2</sup> ·sr)                                   | Para:<br>$\alpha \leq 11$ mrad<br>$C_a = 11$      | <b>Ojos:</b> Retina-----quemaduras                           |
|                                    | Para $10 \mu s \leq t \leq 10$ s<br>$L_R = (5 \cdot 10^7) / (C_a \cdot t^{0,25})$ (W/ m <sup>2</sup> ·sr) | $11 \leq \alpha \leq 100$ mrad<br>$C_a = \alpha$  |  |
|                                    | Para $t < 10 \mu s$<br>$L_R = (8,89 \cdot 10^8) / C_a$ (W/ m <sup>2</sup> ·sr)                            | $\alpha > 100$ mrad<br>$C_a = 100$                |  |
| 780-3000<br>(IRA e IRB)            | Para $t \leq 1.000$ s<br>$E_{IR} = 18.000 \cdot t^{0,75}$ (W/ m <sup>2</sup> )                            |   | <b>Ojos:</b> Córnea-----Quemaduras<br>Cristalino---cataratas |
|                                    | Para $t > 1.000$ s<br>$E_{IR} = 100$ (W/ m <sup>2</sup> )   |   |  |
| 380-3000<br>(visible, IRA e IRB)   | Para $t < 10$ s<br>$H_{piel} = 20.000 \cdot t^{0,25}$ (J/ m <sup>2</sup> )                                |   | <b>Piel</b> ----Quemaduras                                   |

Fig 2.3. Límites de las emisiones electromagnéticas en el rango de las frecuencias de infrarrojo [8].

Donde  $L_R$  es la radiancia efectiva, expresada en vatios por metro cuadrado por estereorradián,  $E_{IR}$  es la irradiancia total, expresada en vatios por metro cuadrado,  $H_{piel}$  es la exposición radiante total, expresada en julios por metro cuadrado y  $\alpha$  es el ángulo subtendido por una fuente, percibido en un punto del espacio, expresado en milirradiantes [8].



### 2.3. Contenido de la memoria

En este epígrafe se comenta el contenido de cada parte de este trabajo.

- Capítulo 1: Motivación.  
Se exponen las razones que impulsaron el desarrollo de este trabajo.
- Capítulo 2: Introducción.  
Se comentan los objetivos, el marco regulador, el contenido de la memoria, el estado del arte actual y una introducción teórica de los conceptos necesarios para entender el desarrollo y los resultados de este trabajo.
- Capítulo 3: Desarrollo.  
Se explica el desarrollo del programa realizado en MATLAB que permite simular un sistema de detección de objetivos basado en entrelazamiento cuántico.
- Capítulo 4: Resultados.  
Se exponen los resultados obtenidos. Estos se dividen en cinco partes:
  - Observación de las curvas teóricas de los límites de probabilidad de error de los sistemas cuántico y clásico, y de la probabilidad de error utilizando el receptor OPA.
  - Comparación de la curva teórica de probabilidad de error del receptor OPA ideal y la aproximación Gaussiana de este.
  - Validación de los procesos implementados en el sistema de radar cuántico a partir de la comparación de las matrices de covarianza obtenidas con las teóricas.
  - Simulaciones, utilizando el método de Montecarlo, de la probabilidad de error para distintos valores de  $N_S$ .
  - Observación del comportamiento de las curvas teóricas de probabilidad de error al variar de la reflectividad del blanco  $\kappa$ .
- Capítulo 5: Conclusiones  
En este se exponen los comentarios finales sobre los resultados obtenidos, las posibles mejoras y el trabajo futuro.
- Capítulo 6: Metodología y presupuesto.  
Se comentan los paquetes de trabajo y cronograma que se siguieron para la realización de este trabajo así como los costes totales.
- Anexos  
En estos se explica con mayor detalle ciertos desarrollos matemáticos importantes para entender el código desarrollado.

## 2.4. Estado del Arte

*Quantum illumination* es un campo reciente y en rápido desarrollo de la detección cuántica. Los primeros estudios se remontan a los trabajos de S. Lloyd, quien propuso el concepto en el año 2008. Lloyd demostró que los fotones entrelazados podían utilizarse para la detección a distancia con mayor precisión que los métodos clásicos, incluso en presencia de ruido de fondo [9].

Desde el trabajo de Lloyd, varios investigadores han explorado el potencial de la iluminación cuántica para diversas aplicaciones, como la detección de objetivos, la criptografía cuántica y la comunicación cuántica. Un estudio especialmente influyente fue el realizado por Si Hui Tan titulado “*Quantum State Discrimination with Bosonic Channels and Gaussian States*”, que amplió el trabajo de Lloyd analizando el protocolo *quantum illumination* en términos de su discriminación Gaussiana, una métrica clave para caracterizar el rendimiento de los sistemas de comunicación cuántica. Tan propuso el uso de estados Gaussianos, concretamente estados comprimidos o *squeezed*, para maximizar el rendimiento de la iluminación cuántica y demostró que estos estados pueden lograr una mayor relación señal a ruido en comparación con los métodos clásicos. Su estudio demostró que el uso de estados Gaussianos en la iluminación cuántica puede mejorar la precisión de la detección de objetivos, lo que la convierte en una solución atractiva para una serie de aplicaciones en las que se requiere una gran precisión en presencia de ruido de fondo [10].

Estos primeros estudios sobre iluminación cuántica han sentado las bases para futuras investigaciones en este campo y han inspirado un creciente interés por el potencial del entrelazamiento cuántico en la mejora de otras tecnologías.

Actualmente existen múltiples grupos de investigación y organizaciones de todo el mundo trabajando en el desarrollo de sistemas de detección de objetivos basados en tecnologías cuánticas. En los últimos años se han realizado varias demostraciones experimentales de estos sistemas utilizando frecuencias ópticas y también ha habido propuestas teóricas sobre cómo ampliar estos conceptos al régimen de microondas.

En 2015, Zhang et al. [11] realizaron el primer experimento real de detección cuántica utilizando el protocolo *quantum illumination*. Se demostró experimentalmente un sistema de detección mejorado por entrelazamiento

resistente a la decoherencia cuántica. Debido a imperfecciones experimentales no se pudo alcanzar la ventaja cuántica teórica completa (permitida por el sistema implementado) de 3 dB, pero se demostró una mejora del 20% (0,8 dB) del exponente de la probabilidad de error respecto al esquema clásico óptimo en un entorno de 14 dB de pérdida y un ruido de fondo 75 dB más fuerte que la luz devuelta. Es uno de los pocos experimentos en los que el protocolo de *quantum illumination* se ha comparado con un esquema óptimo clásico de la misma potencia. El resultado muestra una ventaja por parte del sistema cuántico y sugiere que podría desarrollarse una tecnología de detección cuántica ventajosa para situaciones prácticas.

Un experimento más reciente es el de England et al. [12], en el que se utilizó el entrelazamiento y el recuento de fotones. Sin embargo, los autores operaron en un régimen de bajo ruido de fondo donde no es posible observar ninguna ventaja cuántica.

Aunque los experimentos mencionados anteriormente se realizaron en frecuencias ópticas, debido a que existen actualmente más componentes ópticos pensados para tecnologías cuánticas, el reciente desarrollo de nuevas fuentes de entrelazamiento en el régimen de microondas ha permitido llevar a cabo los primeros experimentos de radar cuántico.

En el experimento de Barzanjeh et al. [13] se generan campos entrelazados a frecuencias de microondas, utilizando un *Josephson parametric converter*, para iluminar un objetivo a temperatura ambiente a una distancia de 1 metro. Se implementa un receptor digital que muestra un mejor desempeño que un sistema clásico en las mismas condiciones, a pesar de la destrucción del entrelazamiento debido al trayecto que recorre la señal. Los resultados resaltan, no solo las oportunidades, sino también los retos en el camino hacia una primera aplicación a temperatura ambiente de los circuitos cuánticos de microondas. Un gran problema fue que el ruido de pre-amplificación es lo suficientemente grande como para romper el entrelazamiento antes de interrogar la región objetivo. De hecho la mecánica cuántica asegura que la amplificación con ganancia  $G$  siempre viene acompañada de algún ruido de varianza  $G - 1$  que reduce el entrelazamiento entre las señales. En consecuencia, la iluminación cuántica no fue relevante en este escenario.

Otros experimentos realizados presentaban también defectos ya que se utilizaba un receptor heterodino. Al medir de forma heterodina la señal reflejada y la de referencia se introduce un ruido adicional que deteriora las correlaciones entre las dos señales. Existen estrategias clásicas muy eficientes para contrarrestar este ruido que, sin embargo, no pueden aplicarse al caso cuántico. Como resultado, cuando la señal de referencia y la señal reflejada se miden individualmente mediante detección heterodina, siempre es posible encontrar un radar clásico que funcione tan bien (a veces incluso mejor) que el cuántico. La única forma de explotar las ventajas de las correlaciones cuánticas es realizar una medida conjunta de la señal reflejada y la de referencia [14].

Uno de los pocos experimentos de detección cuántica en microondas que trata este tema es el de Barzanjeh et al. [15]. En este se describe y analiza un sistema que sí permite aplicar el protocolo de *quantum illumination* en frecuencias de microondas. Se utiliza un convertidor electro-optomecánico para entrelazar una señal de microondas con una señal a frecuencias ópticas, enviando la primera para sondear la región objetivo y reteniendo la segunda en la fuente. En el receptor, la radiación de microondas recibida se convierte en un campo óptico que se combina con el de referencia en una **medición cuántica conjunta**. La ventaja de QI se muestra especialmente evidente al detectar los débiles retornos de blancos de baja reflectividad que están sumergidos en el ruido térmico brillante, típico de los entornos de microondas a temperatura ambiente. Se demostró que la probabilidad de error de este sistema de radar cuántico es mejor que la de cualquier radar de microondas clásico de igual potencia transmitida.

En el 2021, se propuso en [16] una alternativa al prototipo de radar cuántico electro-optomecánico comentado en el párrafo anterior. Este consiste en una fuente cuántica híbrida basada en magnónica de cavidades, donde el medio que sirve de puente entre el modo óptico y de microondas es el magnón. El magnón se define como una pequeña cantidad de energía correspondiente a una disminución específica de la fuerza magnética, la cual viaja como una unidad a través de una sustancia magnética.

En esta investigación se demostró que la magnónica de cavidades se puede utilizar para realizar QI en microondas. El convertidor magnónico analizado puede generar una cantidad significativa de entrelazamiento cuántico, por fotón de microondas emitido entre los campos de microondas y óptico de salida. A pesar

que el canal rompe el entrelazamiento, este sistema permite alcanzar una probabilidad de error de detección varios órdenes de magnitud inferior que el proceso de *quantum illumination* que utiliza un convertidor electro-optomecánico y que cualquier radar de microondas de estados clásicos de igual energía transmitida.

## 2.5. Introducción teórica

En este epígrafe se presentan una serie de conceptos que son necesarios para entender el desarrollo de este trabajo.

Antes de continuar es importante hacer una aclaración. Pese a haber remarcado la diferencia entre la detección cuántica y el radar cuántico, en los siguientes epígrafes se utilizarán estos dos términos de forma indistinta.

Esto se hace, siguiendo el ejemplo de gran parte de la literatura en donde estos términos se entienden prácticamente como uno solo, ya que permite facilitar la explicación y hacer más intuitivas las comparaciones con el sistema clásico. Por lo que de aquí en adelante se usará el término radar cuántico para hacer referencia al sistema de detección planteado a frecuencias ópticas.

### 2.5.1. Nociones de mecánica cuántica

Una de las mayores diferencias que existe entre la mecánica clásica y la cuántica es que la mecánica clásica se centra en los objetos macroscópicos, es decir, los que pueden verse a simple vista, mientras que la mecánica cuántica se ocupa de objetos en escala microscópica, es decir, objetos tan pequeños, aislados y fríos que se encuentran fuera del alcance de los sentidos.

Otra diferencia importante es la forma en que describen el comportamiento de los objetos. En la mecánica clásica, los objetos tienen una posición y velocidad definidas en todo momento, y su evolución puede predecirse con un alto grado de exactitud. Un ser humano es capaz de saber cómo se comportan estos objetos por simple intuición, ya que se encuentra rodeado de ejemplos diariamente.

En cambio, en la mecánica cuántica se admite el concepto de incertidumbre, según el cual la posición y el momento de un objeto no pueden conocerse simultáneamente con precisión.

Por último, la mecánica clásica se basa en la idea de causa y efecto, según la cual un acontecimiento (la causa) conduce a otro acontecimiento (el efecto). En cambio, la mecánica cuántica se basa en probabilidades, por lo que sólo es posible predecir la probabilidad de que se produzca un evento.

En general, la mecánica clásica es una buena descripción del mundo a escala macroscópica, mientras que la mecánica cuántica es necesaria para describir con precisión el comportamiento de los objetos a escala microscópica.

Para poder lidiar con estas diferencias e intentar comprender este mundo cuántico es necesario utilizar abstracciones matemáticas que permitan reformular la intuición. Aunque podría discutirse que la mecánica clásica también utiliza abstracciones, estas son fundamentalmente diferentes a las que se usan en la mecánica cuántica por dos motivos:

- Se utilizan diferentes objetos matemáticos para representar el estado de un sistema.
- La relación que existe entre un estado y una medida es completamente distinta a la que se tiene en la mecánica clásica. En el mundo clásico realizar una medida permite determinar el estado de un sistema, sin embargo, esto no es posible en el mundo cuántico, donde los estados y las medidas son dos cosas diferenciadas que no tienen una relación intuitiva [17].

### 2.5.2. Postulados de la mecánica cuántica

Algunas de las abstracciones matemáticas utilizadas se presentan en los tres postulados de la mecánica cuántica. Estos describen el entorno, la evolución temporal y la información que puede extraerse de un sistema en escala cuántica.

### 2.5.3. El entorno

Cada sistema es asociado con un espacio de Hilbert  $H$  en el campo de los números complejos. El sistema está completamente descrito, en cada instante de tiempo, por un estado cuántico. Este estado es un vector unitario del espacio  $H$  y se representa, según la notación de Dirac, como un *ket*  $|\psi\rangle$ . Este estado debe tener módulo igual a la unidad, por lo que su producto interno o escalar debe dar el siguiente resultado:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (2.1)$$

Donde  $\langle\psi|$  es el transpuesto conjugado del estado  $|\psi\rangle$ , también llamado *bra*.

Debido a que se está trabajando con espacios vectoriales de Hilbert, en los que existe la condición de linealidad, pueden darse combinaciones lineales de estados.

$$|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle + \dots + \alpha_N|\psi_N\rangle \quad (2.2)$$

Donde  $|\psi\rangle$  será un estado del espacio  $H$  siempre que los *kets*  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \dots |\psi_N\rangle$  sean estados de dicho espacio. Esto se conoce como el principio de superposición, el cual es un concepto fundamental de la mecánica cuántica que describe la

capacidad de un sistema cuántico de existir en múltiples estados de manera simultánea.

Estos estados deben cumplir también con la condición de normalización.

$$\sum_i \sum_j \alpha_i^* a_j \langle \psi_i | \psi_j \rangle = 1 \quad (2.3)$$

Para entender mejor el uso de los *kets* en mecánica cuántica y la forma en que se relacionan con el mundo físico, es necesario generalizar los conceptos de componentes vectoriales y vectores base en forma de funciones.

No se considera una buena idea el intentar ver los estados cuánticos o *kets* como vectores clásicos, es decir, verlos como coordenadas en un espacio tridimensional ya que estos pueden tener más de tres dimensiones, incluso infinitas. Resulta mejor considerar estos *kets* como vectores de un espacio abstracto, ya que sus componentes no representan dimensiones físicas. Sus componentes podrían ser los parámetros de un modelo matemático o todas las configuraciones posibles de un sistema, podrían también representar la velocidad, el momento, la aceleración, la energía o cualquier otro parámetro de interés del sistema.

Con esto en mente, una forma útil de representarlos es utilizar un gráfico de dos dimensiones donde las componentes vectoriales se colocan a lo largo del eje horizontal y el eje vertical representa la amplitud de dichas componentes, como se muestra en la figura 2.4.

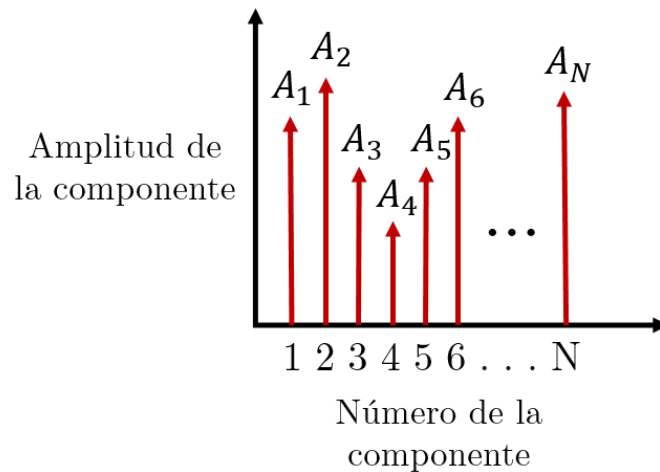


Fig 2.4. Componentes vectoriales de un vector de N dimensiones [18].

Cada una de las N componentes representadas en la figura 2.4 pertenece a un vector de la base del espacio vectorial abstracto N dimensional, al cual pertenece el estado cuántico. Si aumenta significativamente el número de componentes estas



pueden tratarse como una función continua y no como una serie de valores discretos. En la figura 2.5 puede verse esta función  $f(x)$ , la cual devuelve la amplitud de la componente  $x$  indicada.

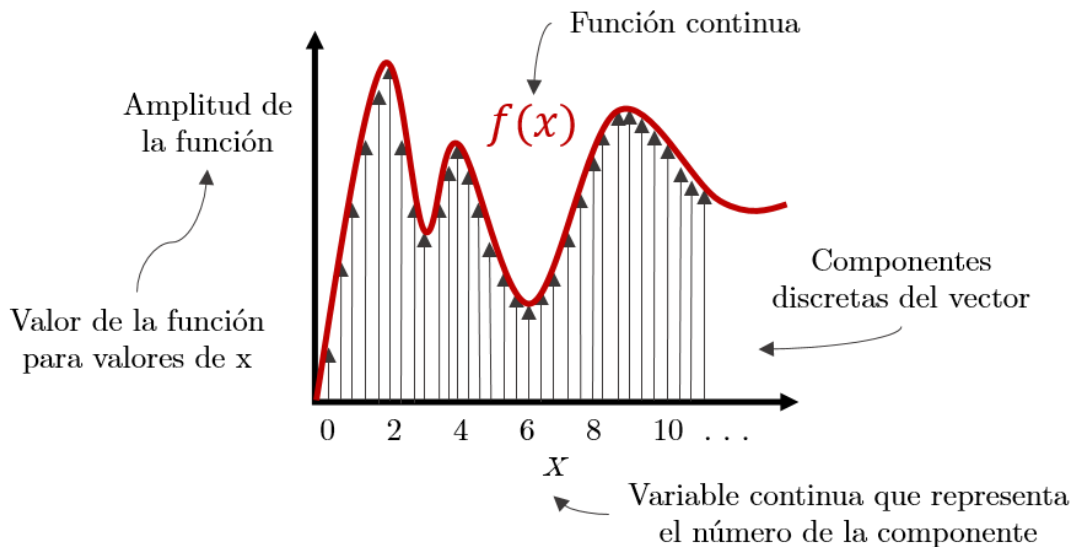


Fig 2.5. Relación entre componentes vectoriales y una función continua [18].

La importancia que tiene esto en la mecánica cuántica recae sobre el hecho de que las soluciones de la ecuación de Schrödinger vienen dadas por funciones ( $f(x)$ ) que pueden ser representadas en forma de vectores abstractos.

La ecuación de Schrödinger describe cómo evoluciona un sistema cuántico a lo largo del tiempo. Al resolver esta ecuación para un sistema dado, se obtiene la función de onda del sistema  $f(x)$ , también conocida como función de estado. Esta función proporciona información sobre la probabilidad de encontrar el sistema en un determinado estado o configuración.

Por esto, a los valores que devuelven estas funciones se les llama amplitudes de probabilidad y se corresponden con los coeficientes complejos  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_N$  que se ven en la ecuación (2.2). Se les llama de esta forma ya que al elevarlos al cuadrado (en valor absoluto  $|\alpha_i|^2$ ) o multiplicarlos por su conjugado ( $\alpha_i \alpha_i^*$ , ya que pueden ser valores complejos) se obtiene la probabilidad de que al medir el estado superpuesto  $|\psi\rangle$  este colapse al estado  $|\psi_1\rangle$  o  $|\psi_2\rangle \dots$  o  $|\psi_N\rangle$ , respectivamente [18].

#### 2.5.4. Estados puros y mixtos

En mecánica cuántica se pueden clasificar los estados como: estados puros y estados mixtos. Esta clasificación depende del punto de vista del observador y del conocimiento que se tenga, en un instante determinado, sobre el estado del sistema.

Si un observador conoce con certeza el estado de un sistema, por ejemplo,  $s = |\psi\rangle \in H$ , se dice que el sistema se encuentra en un estado puro. Se puede decir que el sistema se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$  con una probabilidad del 100%. Este estado puede ser tanto un vector de la base del espacio de Hilbert  $H$ , por ejemplo,  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle$ , como un estado en superposición. Para que se entienda mejor este último caso se va a utilizar como ejemplo uno de los sistemas cuánticos más fundamentales, el *qubit*.

El entorno de este sistema es un espacio de Hilbert de dos dimensiones,  $H = \mathbb{C}^2$ , cuya base está formada por dos vectores ortonormales,  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Un ejemplo de un estado podría ser el siguiente:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (2.4)$$

Este cumple con la condición de normalización, ya que  $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = 1$ . Este es un estado puro ya que es un estado perfectamente preparado [19] y se sabe con certeza que el sistema se encuentra en el estado superpuesto  $|\psi\rangle$ . Esta representación no indica que el estado tenga 50% de probabilidad de estar en el estado  $|0\rangle$  y 50% de probabilidad de estar en el estado  $|1\rangle$ , esta representación indica que se tiene un 100% de certeza de que el estado está en los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  simultáneamente.

En cambio, un estado mixto es una mezcla estadística de estados puros. El observador sabe que el sistema se encuentra en un estado que pertenece a un subconjunto de  $H$ , como por ejemplo  $S = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle\}$ , pero solo sabe en cuál estado específicamente según las probabilidades  $p_i := P[s = |\psi_i\rangle]$ .

A partir del caso del *qubit* se puede dar un ejemplo de un estado mixto. Se supone lo siguiente: se toma el estado superpuesto mostrado en la ecuación (2.4) y se mide, pero se descarta el resultado antes de que el observador pueda saber que ha sido. Como se ha comentado antes, al medir este estado el sistema colapsará definitivamente al estado  $|0\rangle$  o al  $|1\rangle$ , sin embargo, el observador que ha

descartado el resultado de la medida no sabe a cuál, solo sabe con certeza que estará en el estado  $|0\rangle$  con una probabilidad del 50% ( $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 0.5$ ) o en  $|1\rangle$  con una probabilidad del 50% ( $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 0.5$ ). En este caso se diría que el sistema se encuentra en un estado mixto.

Para describir estos estados de forma matemática se utiliza una matriz de densidad, la cual está definida por la siguiente ecuación:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2.5)$$

Los estados puros también pueden representarse a través de matrices de densidad, asumiendo que su probabilidad es del 100%,  $P[s = |\psi\rangle] = 1$

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.6)$$

Estas matrices, también llamadas operadores de densidad, deben cumplir con las siguientes propiedades:

- Ser hermítico,  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$
- Ser semidefinido positivo,  $\hat{\rho} \geq 0$
- Tener traza igual a uno,  $Tr[\hat{\rho}] = 1$
- Tener  $Tr[\hat{\rho}^2] \leq 1$  y si el sistema se está en un estado puro,  $Tr[\hat{\rho}^2] = 1$

Los estados mixtos surgen cuando el sistema interactúa con su entorno o cuando está sometido a influencias externas que hacen que su función de onda se entremezcle con la función de onda de otro sistema. Estos tienen un papel muy importante en las comunicaciones.

En un enlace de comunicaciones cuánticas, en el extremo emisor se eligen estados puros de un alfabeto para transmitir información. Si se considera un canal no ideal el estado que llega al extremo receptor ya no puede tomarse como puro, ya que se ha visto afectado por efectos como el ruido térmico, y debe expresarse como un estado mixto utilizando una matriz de densidad [1].

### 2.5.5. Evolución temporal

La evolución temporal de un estado cuántico puede describirse utilizando un tipo de operadores (matrices) llamados operadores unitarios. La suposición básica que se hace en mecánica cuántica es que si se conoce el estado de un sistema en un instante de tiempo, entonces las ecuaciones cuánticas del movimiento te dirán cómo será el estado en un futuro.

La evolución temporal se describe mediante la ecuación de Schrödinger, que puede escribirse como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \hat{H} \Psi(r, t) \quad (2.7)$$

Donde  $\hbar$  es la constante reducida de Planck ( $\frac{h}{2\pi}$ ),  $t$  es el tiempo,  $\Psi(r, t)$  es la función de onda del sistema y  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano, del cual se hablará en futuros epígrafes. Resolviendo esta ecuación, integrando ambos lados con respecto al tiempo se obtiene:

$$\Psi(r, t) = U(t) \Psi(r, 0) \quad (2.8)$$

Donde  $U(t)$  es el operador unitario que describe la evolución temporal del estado cuántico. La ecuación de Schrödinger puede expresarse también utilizando el estado del sistema en vez de la ecuación de onda, por lo que la solución sería la siguiente:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \quad (2.9)$$

El operador  $U(t)$  se suele llamar operador de evolución temporal (*time-development operator*) y se define como:

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \quad (2.10)$$

Es importante señalar que el operador unitario conserva la norma del vector de estado, lo que significa que se conserva la probabilidad de medir un estado determinado [20]. Para que un operador sea considerado como unitario debe cumplir con la siguiente propiedad:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I \quad (2.11)$$

Donde  $I$  es el operador unidad (matriz identidad).

En conclusión, la evolución temporal de un estado cuántico puede describirse a través de un operador unitario que actúa sobre el estado inicial del sistema. Este operador unitario vendrá determinado por el operador Hamiltoniano, el cual describe la energía total del sistema [17].

### 2.5.6. Medidas cuánticas

Como se ha visto, los estados cuánticos se representan como vectores. Los observables físicos o variables dinámicas, es decir, las características que se quieren medir, se describen utilizando operadores lineales que son iguales a sus conjugados hermíticos.

Al hacer una observación se está midiendo una variable dinámica en particular, por ejemplo, la energía del sistema, la posición o momento de una partícula, entre otros.

### 2.5.7. Sobre los operadores lineales

Un operador lineal es un objeto matemático que mapea un vector perteneciente a un espacio vectorial a otro vector del mismo espacio. Estos se definen en un espacio vectorial específico, y deben preservar la estructura de este, lo que significa que deben satisfacer las propiedades de linealidad y aditividad.

Estos operadores son llamados también *machines* (máquinas). Pueden imaginarse como máquinas con dos puertos, entrada y salida. En la entrada se inserta un estado, como  $|A\rangle$ . La máquina  $\mathbf{M}$  se activa y devuelve un resultado en el puerto de salida. El resultado es otro estado  $|B\rangle$ . Este proceso se describe a través de la siguiente ecuación:

$$M|A\rangle = |B\rangle \quad (2.12)$$

Los operadores lineales deben dar un resultado único para cada vector en el espacio [17].

### 2.5.8. Sobre los conjugados hermíticos

En general cuando un operador lineal actúa sobre un estado, el resultado será otro estado (un vector en otra dirección), sin embargo, para algún operador en particular, existirán estados que salgan igual que entraron (vectores que no cambian de dirección), a estos se les llama **eigenestados** (eigenvectores). Un eigenestado del observable  $\mathbf{M}$  es un estado  $|\lambda\rangle$  tal que

$$M|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad (2.13)$$

Donde  $\lambda$  se define como el **eigenvalor** correspondiente al eigenestado  $|\lambda\rangle$  [17]. Los eigenvalores pueden ser números complejos en general, sin embargo, el resultado de medir un observable cualquiera, como  $\mathbf{M}$ , debe ser siempre un número real, como se esperaría al medir cualquier variable dinámica real como la posición o el momento [21]. Por este motivo los observables en la mecánica cuántica se representan con operadores hermíticos. Estos cumplen con la condición de que son iguales a sus complejos conjugados

$$M = M^\dagger \quad (2.14)$$

Y que sus eigenvalores son todos reales [17].

Como consecuencia se puede afirmar que si el sistema se encuentra en un eigenestado  $|\lambda\rangle$  de un observable  $\mathbf{M}$ , correspondiente con el eigenvalor  $\lambda$ , entonces al medir  $\mathbf{M}$  se obtendrá como resultado de la medida el número  $\lambda$  [21].

### 2.5.9. Los principios

Habiendo introducido ya estos últimos conceptos es posible resumirlos en cuatro principios:

1. Los observables físicos, variables dinámicas o cantidades medibles de la mecánica cuántica se representan utilizando operadores hermíticos.
2. Los posibles resultados que se pueden obtener al medir un sistema cuántico son los eigenvalores  $\lambda_i$  del operador que representa al observable. El estado para el cual el resultado de una medida es inequívocamente  $\lambda_i$  es el correspondiente eigenvector  $|\lambda_i\rangle$ .
3. Los estados que pueden distinguirse sin ambigüedad se representan con vectores ortogonales.
4. Si un sistema se encuentra en un estado  $|A\rangle$  y se mide el observable  $\mathbf{L}$ , entonces la probabilidad de observar como resultado  $\lambda_i$  es

$$P(\lambda_i) = \langle A|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|A\rangle \quad (2.15)$$

Donde  $\lambda_i$  son los eigenvalores de  $\mathbf{L}$  y  $|\lambda_i\rangle$  los correspondientes eigenvectores [17].

### 2.5.10. Ejemplo de una medida cuántica

En este ejemplo se quiere medir el spin de un electrón en una dirección específica. El spin puede imaginarse como una flecha en tres dimensiones que apunta en una cierta dirección. Para medirlo es necesario construir operadores para representar las componentes (direcciones),  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ .

En este ejemplo se elige medir la componente z del spin, es decir, apunta hacia arriba ( $|up\rangle$ ) o hacia abajo ( $|down\rangle$ ). Asumiendo que los estados se representan con los siguientes vectores:

$$|up\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |down\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Se puede construir el operador correspondiente de manera que el eigenvalor de  $|up\rangle$  sea  $\lambda_{up} = 1$  y el de  $|down\rangle$  sea  $\lambda_{down} = -1$ . El operador resultante es:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Ahora se realizan las medidas

$$\sigma_z|up\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |up\rangle \quad (2.18)$$

$$\sigma_z|down\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -|down\rangle \quad (2.19)$$

En el primer caso se observa que como el sistema se encontraba en el estado  $|up\rangle$ , el resultado de la medida es el eigenvalor  $\lambda_{up} = 1$  y el sistema se mantiene en el estado  $|up\rangle$ . En el segundo se obtiene también el eigenvalor correspondiente con el eigenestado  $|down\rangle$  ( $\lambda_{down} = -1$ ) y el sistema pasa al estado  $-|down\rangle$  que es el mismo estado con una constante multiplicativa, así que los estados son los mismos.

### 2.5.11. La trampa

Ahora bien ¿qué ocurre si el sistema se encuentra en un estado superpuesto y **no** en un eigenestado? Tomando como ejemplo el siguiente estado superpuesto

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|up\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|down\rangle \quad (2.20)$$

Aplicando ahora el operador  $\sigma_z$  se obtiene matemáticamente

$$\sigma_z|r\rangle = \sigma_z \frac{1}{\sqrt{2}}|up\rangle + \sigma_z \frac{1}{\sqrt{2}}|down\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|up\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|down\rangle \quad (2.21)$$

Y aquí es donde está la trampa. Pese a que el resultado algebraico es otro estado superpuesto, este no sería el estado en el que acabaría el sistema después de hacer la medida. La medida dará como resultado  $+1$ , dejando el sistema en el estado  $|up\rangle$  o dará  $-1$ , dejándolo en el estado  $|down\rangle$ , cada caso con un 50% de probabilidad de ocurrir.

Cuando se realiza una medida en un sistema cuántico, el sistema colapsa en uno de sus eigenestados, y la probabilidad de cada eigenestado viene dada por el módulo al cuadrado de la amplitud de probabilidad de dicho eigenestado (la amplitud al cuadrado de la función de onda en ese estado) [17].

### 2.5.12. Valor esperado

El primer momento estadístico es llamado el valor esperado o valor medio. El valor esperado de un operador representa el resultado más probable de una medición de ese operador. Suponiendo que se tiene una función de probabilidad que define el resultado de un experimento en el que se mide un observable  $L$ . El resultado debe ser uno de los eigenvalores de  $L$ ,  $\lambda_i$ , y la función de probabilidad

es  $P(\lambda_i)$ . Desde un punto de vista matemático, un valor medio viene definido por la siguiente ecuación:

$$\langle L \rangle = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i) \quad (2.22)$$

En mecánica cuántica se expresa de la siguiente manera:

$$\langle L \rangle = \langle \psi | L | \psi \rangle \quad (2.23)$$

Y se obtiene del siguiente desarrollo. Se expande el estado  $|\psi\rangle$  con las bases ortonormales de eigenvectores de  $L$

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\lambda_i\rangle \quad (2.24)$$

Se le aplica el operador  $L$  y usando el hecho de que  $L|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$  se obtiene

$$L|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i L|\lambda_i\rangle = \sum_i \alpha_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \quad (2.25)$$

Por último, se calcula el producto interno con el estado transpuesto conjugado o *bra*  $\langle\psi|$

$$\langle\psi|L|\psi\rangle = \sum_i (\alpha_i^* \alpha_i) \lambda_i \quad (2.26)$$

Como se ha comentado antes, la probabilidad de obtener un cierto eigenvalor al medir viene dada por el módulo al cuadrado de las amplitudes de probabilidad, o lo que es lo mismo el producto  $(\alpha_i^* \alpha_i)$ .

El valor esperado puede calcularse también a partir de la matriz de densidad  $\hat{\rho}$  del estado cuántico  $|\psi\rangle$

$$\langle L \rangle = \text{Tr}(L\hat{\rho}) \quad (2.27)$$

Donde  $\text{Tr}()$  es la operación *traza* [17].

### 2.5.13. Cuantización del campo electromagnético

Para poder entender el protocolo de *quantum illumination* que se utiliza en el radar cuántico es necesario hacer una cuantización del campo electromagnético.

Aunque el uso de la teórica clásica del electromagnetismo puede usarse para describir una gran cantidad de fenómenos, algunos pueden ser solo descritos utilizando la descripción cuántica del campo electromagnético. Por este motivo se empieza comentando el procedimiento de cuantización del campo.



La cuantización del campo electromagnético se refiere al proceso de expresar el campo electromagnético como un conjunto de unidades discretas de energía llamadas cuantos, o fotones. Este proceso es necesario porque, según la mecánica cuántica, la energía sólo puede transferirse en unidades discretas y no de forma continua.

Existen varios enfoques para cuantificar el campo electromagnético, pero uno de los más comunes es llamado *canonical quantization*. Este método consiste en expresar el campo electromagnético como un conjunto de osciladores armónicos y cuantificar los osciladores utilizando los principios de la mecánica cuántica.

Se puede empezar definiendo un conjunto de modos del campo electromagnético  $\{f_i(\mathbf{r}, t)\}$  como solución de la ecuación de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_i(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.28)$$

Dados estos modos, cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell, por ejemplo la del campo eléctrico  $E(\mathbf{r}, t)$  puede expresarse como

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} (a_i f_i(\mathbf{r}, t) + a_i^* f_i^*(\mathbf{r}, t)) \quad (2.29)$$

Donde \* denota conjugación compleja, V es un volumen arbitrariamente grande que contiene el sistema físico que se está considerando,  $\omega_i$  es la frecuencia central asociada a los modos cuasimonocromáticos  $f_i$  y  $a_i = \frac{(q_i + ip_i)}{2}$ , son números complejos, donde  $q_i$  y  $p_i$  se conocen como las cuadraturas de campo o *field quadratures*.

Ahora puede cuantizarse el campo eléctrico  $E(\mathbf{r}, t)$  reemplazando los coeficientes complejos por operadores

$$a_i \rightarrow \hat{a}_i \quad (2.30)$$

$$a_i^* \rightarrow \hat{a}_i^\dagger \quad (2.31)$$

Estos operadores  $\hat{a}_i$  y  $\hat{a}_i^\dagger$  se conocen como los operadores *annihilation* y *creation*, respectivamente y toman estos nombre debido al efecto que tienen sobre los estados de número de fotones o *photon-number states* [14].

Sustituyendo también en la ecuación de las cuadraturas de campo se obtienen las ecuaciones:

$$\hat{q}_i = \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger, \quad \hat{p}_i = i(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i) \quad (2.32)$$

Estos operadores de cuadratura representan observables adimensionales del sistema y actúan como los operadores de posición y momento del oscilador armónico cuántico [22].

En esencia lo que se obtiene a partir de este proceso de cuantización es la asociación de un oscilador armónico cuántico a cada uno de los modos del campo electromagnético. De acuerdo con la hipótesis de Planck, a diferencia de la teoría clásica en la que la energía del campo puede tomar cualquier valor positivo, en la teoría cuántica los valores de energía del campo son discretos. El oscilador armónico con frecuencia  $\omega$  puede tener solo valores de energía que sean múltiplos del cuanto fundamental  $\hbar\omega$  (energía de un fotón).

De acuerdo con esto, la energía contenida en el campo de radiación viene dada por la ecuación

$$E_R = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.33)$$

Esta ecuación indica que el oscilador correspondiente está en el estado de energía  $n$  y que este estado tiene  $n$  cuantos de energía, más una energía con valor  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  la cual se conoce como energía del vacío o *zero-point energy*.

Estos cuantos son los que se conocen como fotones, por lo que se habla de tener una excitación de  $n$  fotones en un modo determinado del campo radiado. Se dice que un fotón ha sido creado cuando la energía electromagnética del modo aumenta un único cuanto  $\hbar\omega$ . De igual forma, se dice que un fotón ha sido destruido o aniquilado cuando la energía decrece un cuanto  $\hbar\omega$  [20].

Una representación gráfica de la creación y aniquilación de un fotón causando una subida o bajada de un nivel de energía, respectivamente, se puede observar en la figura 2.6.

Estas acciones de creación y aniquilación de fotones son llevadas a cabo por los operadores anteriormente introducidos,  $\hat{a}_i$  y  $\hat{a}_i^\dagger$ , *annihilation* y *creation*, respectivamente. Estos actúan sobre los estados de número de fotones, los cuales se representan como  $|n_i\rangle$ . Este es un estado cuántico del campo electromagnético que contiene  $n_i$  fotones y cuyo perfil espacial y temporal está definido por el modo  $f_i(r, t)$ .

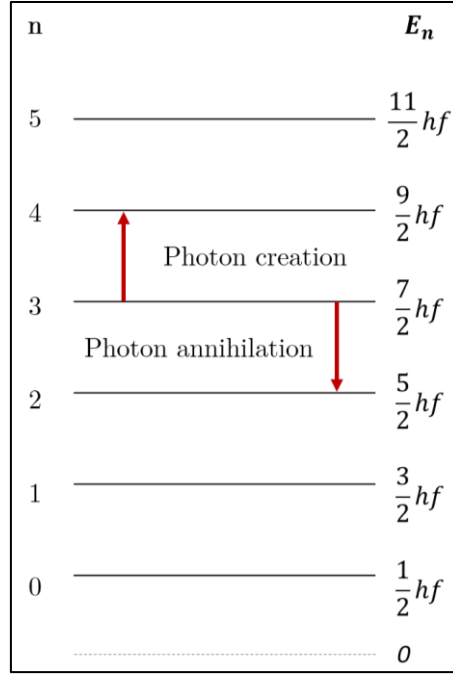


Fig 2.6. Los seis niveles de energía más bajos de un oscilador armónico cuántico [20].

La acción que tienen los operadores de *annihilation* y *creation* sobre los estados  $|n_i\rangle$  viene dada por las siguientes ecuaciones

$$\hat{a}_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle \quad (2.34)$$

$$\hat{a}_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle \quad (2.35)$$

Cuando actúa el operador *annihilation* el sistema pasa a estar en un estado con un fotón de energía menos  $|n_i - 1\rangle$  y cuando actúa el operador *creation* se crea un fotón, dejando el sistema en el estado  $|n_i + 1\rangle$ .

A partir de estas ecuaciones se puede definir otro operador llamado el operador de número de fotón o *photon-number operator* con la siguiente expresión:

$$\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (2.36)$$

Los estados de número de fotones son eigenestados de este operador, por lo que al medirlo el sistema se mantiene en el mismo nivel de energía y el resultado de la medida o eigenvalor correspondiente es el número de fotones  $n_i$  del estado. Esto se observa en la siguiente ecuación:

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |n_i\rangle = \hat{n}_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle \quad (2.37)$$

Estos operadores siguen la siguiente ley de conmutación:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i = \delta_{i,j} \quad (2.38)$$

Si dos operadores conmutan, esto significa que ambas magnitudes pueden medirse al mismo tiempo; de lo contrario, la precisión de la medición de una magnitud y la de la otra se verán afectadas, es decir, existirá incertidumbre en la medida de una de ellas. Los operadores *annihilation* y *creation* del mismo modo no conmutan. Otro ejemplo puede ser el de los operadores posición  $\hat{q}_i$  y momento  $\hat{p}_i$  del mismo modo, estos operadores tampoco conmutan, por lo que no pueden ser medidos de manera simultánea con una precisión arbitraria. Sin embargo, los operadores *annihilation* y *creation*, y posición  $\hat{q}_i$  y momento  $\hat{p}_i$ , de modos diferentes sí conmutan, por lo que pueden medirse con precisión.

Con todas las definiciones dadas anteriormente, se puede escribir el operador cuántico que describe el campo eléctrico como:

$$\hat{E}(r, t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \left( \hat{a}_i f_i(r, t) + \hat{a}_i^\dagger f_i^*(r, t) \right) \quad (2.39)$$

Esta última ecuación es el núcleo conceptual de la óptica cuántica, donde la parte cuántica proviene de los operadores *annihilation* y *creation*, su acción sobre los estados de número de fotones y su relación de conmutación. Por otro lado, la parte óptica proviene de los modos  $f_i(r, t)$ , que son soluciones de la ecuación de onda, y por tanto evolucionan y se propagan como ondas electromagnéticas clásicas. Este proceso puede realizarse para obtener también el operador de campo magnético  $\hat{B}(r, t)$

A continuación, se introducen algunos formalismos que se utilizan para describir los estados cuánticos de la luz. Anteriormente se hizo referencia al estado del vacío, el cual tiene una energía finita llamada *zero-point energy*, sin embargo, este no se definió completamente. El estado  $|0\rangle$  del vacío es el estado del campo electromagnético que no contiene fotones. Cuando no hay fotones presentes, ningún fotón puede ser eliminado ( $\hat{a}_i|0\rangle = 0$ ). Por el contrario, se pueden añadir fotones al vacío, y se pueden obtener los estados  $|n_i\rangle$  aplicando  $n_i$  veces el operador *creation* al estado de vacío, de la siguiente manera [14]:

$$|n_i\rangle = \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle}{(n_i)!} \quad (2.40)$$

#### 2.5.14. Distribución del espacio de fases y estados gaussianos

En este epígrafe, se discuten las propiedades de los estados cuánticos de la luz que son relevantes para *quantum illumination*. Todos estos estados pertenecen a una clase de estados llamados estados Gaussianos, es decir, estados cuánticos que se caracterizan completamente por el primer y segundo momento estadístico de los operadores de cuadratura. En concreto, los estados gaussianos mixtos son el análogo cuántico del ruido Gaussiano clásico. Estos estados se comprenden mejor en términos de su función de Wigner.

#### 2.5.15. Función de Wigner

En un sistema físico formado por  $N$  modos electromagnéticos, se tienen  $N$  pares de operadores *annihilation* y *creation*  $\{\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger\}_{k=1}^N$ . Utilizando las ecuaciones (2.32) se obtienen los  $N$  pares de operadores de cuadratura del campo  $\{\hat{q}_k, \hat{p}_k\}_{k=1}^N$ , los cuales se suelen ordenar en un vector de operadores  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N)$ .

Toda la información física sobre el sistema de  $N$  modos está contenida en su estado cuántico. Este está representado por un operador de densidad  $\hat{\rho}$  que actúa sobre el espacio de Hilbert correspondiente. Ahora es importante señalar que cualquier operador de densidad tiene una representación equivalente en términos de una distribución de cuasi probabilidad definida sobre un espacio de fase, a esta función se le llama función de Wigner [22]. Aunque la propia función de Wigner es una distribución de cuasi probabilidad, sus funciones marginales correspondientes a cuadraturas medibles, como la posición  $\hat{q}_k$  y el momento  $\hat{p}_k$ , sí son probabilidades propiamente dichas [14].

Las cantidades que caracterizan a las funciones de Wigner son los momentos estadísticos del estado cuántico. En particular, el primer momento se denomina el vector medio

$$\bar{\mathbf{x}} = \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbf{x}}\hat{\rho}) \quad (2.41)$$

Y el segundo momento se denomina matriz de covarianza  $V$ , la cual se define como:

$$V_{ij} := \frac{1}{2} \langle \{\Delta \hat{x}_i, \Delta \hat{x}_j\} \rangle \quad (2.42)$$

Donde los corchetes denotan el anti conmutador  $(\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$  y  $\Delta \hat{x}_i = \hat{x}_i - \langle \hat{x}_i \rangle$ . Los elementos diagonales de esta matriz representan las covarianzas de los operadores de cuadratura  $V_{ii} = V(\hat{x}_i) = \langle (\hat{x}_i)^2 \rangle = \langle \hat{x}_i^2 \rangle - \langle \hat{x}_i \rangle^2$ , mientras que los

elementos fuera de la diagonal cuantifican las correlaciones entre los distintos modos [22].

El formalismo descrito hasta ahora es bastante general, pero permite describir estados cuánticos de luz multimodales arbitrarios. A continuación, se utilizan estos conceptos para describir estados cuánticos de uno (*single-mode*) y dos modos (*two-mode*) que son relevantes para el protocolo de *quantum illumination*.

### 2.5.16. Estados coherentes

Estos son estados monomodo definidos como eigenestados del operador *annihilation*

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (2.43)$$

Donde el eigenvalor  $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$  es un número complejo que se corresponde con las amplitudes de onda complejas en óptica clásica, con magnitudes  $|\alpha|$  y fases  $\varphi$ . La solución de la ecuación anterior (2.43) puede escribirse en función de los estados de número de fotones o, como también se les llama, estados de Fock

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.44)$$

Su función de Wigner toma una forma Gaussiana con media

$$\bar{x} = (q, p) = \left( \frac{\alpha + \alpha^*}{2}, \frac{\alpha - \alpha^*}{2} \right) = (|\alpha| \cos(\varphi), |\alpha| \sin(\varphi)) \quad (2.45)$$

Y matriz de covarianza

$$V = \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

En particular, fijando  $\alpha = 0$  se obtiene el estado de vacío  $|0\rangle$ . Por lo tanto, cada estado coherente tiene la misma matriz de covarianza que el vacío. Además, esta forma particular de la matriz de covarianza  $V$  satura la relación de incertidumbre que existe entre la posición y el momento

$$V(\hat{q}_i) V(\hat{p}_i) \geq 1 \quad (2.47)$$

Como consecuencia, los estados coherentes permiten la mejor precisión en las medidas simultáneas de las cuadraturas  $\hat{q}_i$  y  $\hat{p}_i$ . En la figura 2.7 se comparan la distribución de Wigner del vacío y la de un estado coherente con número de fotones distinto de cero.

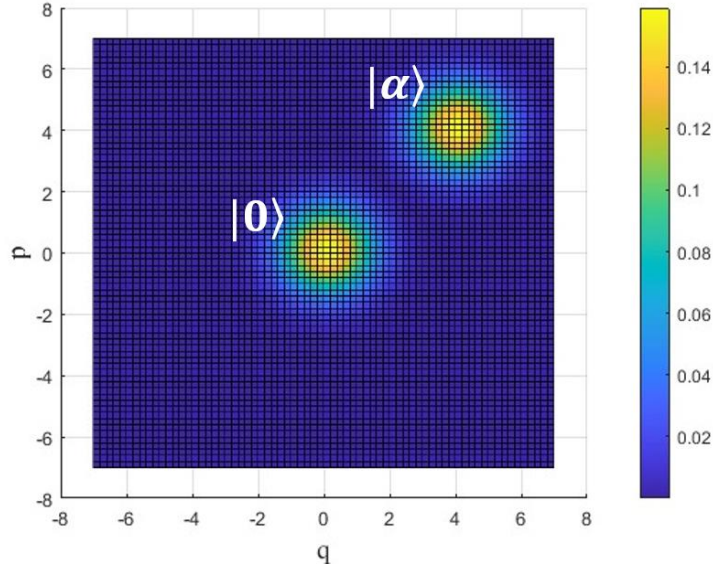


Fig 2.7. Distribuciones de Wigner de un estado de vacío  $|0\rangle$  y un estado coherente  $|\alpha\rangle$  con  $\alpha = 4 + 4i$ .

Los estados coherentes son los estados cuánticos que más se asemejan a un campo electromagnético clásico [14].

### 2.5.17. Estado térmico

Otra clase de estados Gaussianos monomodo que será importante en la definición del radar cuántico es el estado cuántico del cuerpo negro, que a menudo se asocia con el ruido térmico. Dicho estado es una mezcla estadística de estados Fock

$$\rho_T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_T^n}{(N_T + 1)^{n+1}} |n\rangle\langle n| \quad (2.48)$$

Donde  $N_T$  es el número promedio de fotones térmicos. Este valor depende de la frecuencia del modo  $\omega$  y de la temperatura del medio  $T$

$$N_T = \frac{1}{\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1} \quad (2.49)$$

Donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Los estados térmicos son también estados Gaussianos cuya función de Wigner se encuentra definida por el vector medio

$$\bar{x} = (q, p) = (0, 0) \quad (2.50)$$

Y matriz de covarianza

$$V = (2N_T + 1)\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 2N_T + 1 & 0 \\ 0 & 2N_T + 1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

En la figura 2.8 se muestra su representación en el espacio de fases. Esta está siempre centrada en el origen y tienen una anchura que viene determinada por el número medio de fotones  $N_T$ . En consecuencia, la distribución Gaussiana de cuasi probabilidad asociada a un estado térmico con  $N_T > 0$  es más amplia que la de un estado coherente.

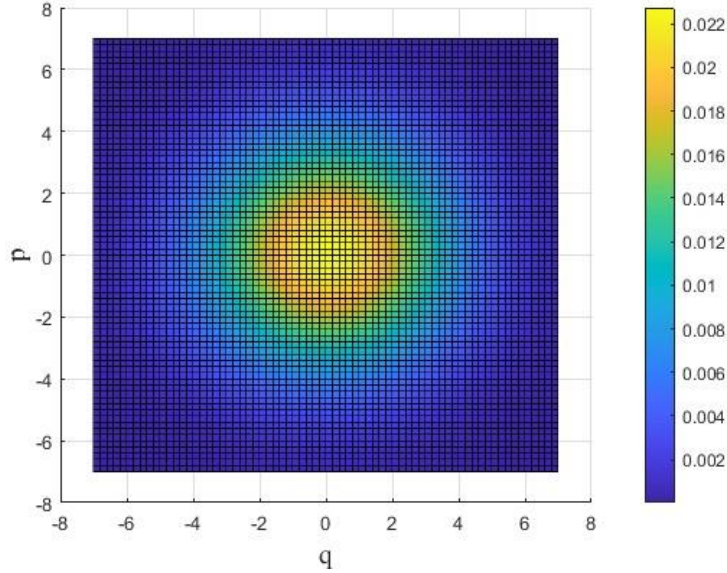


Fig 2.8. Distribución de Wigner de un estado térmico  $\rho_T$  con número promedio de fotones  $N_T = 3$ .

Estos estados son los que se utilizan para describir el ruido de fondo en el protocolo de *quantum illumination*, considerando como temperatura  $T$ , la temperatura a la se encuentra el receptor. Un aspecto que es importante resaltar es la diferencia entre la intensidad del ruido a frecuencias ópticas y de microondas, ya que será relevante en la aplicación del radar cuántico. Para frecuencias ópticas  $N_T$  es casi despreciable, pero para frecuencias de microondas  $N_T$  es significativamente mayor que uno [14].

#### 2.5.18. Estados comprimidos o *squeezed states*

Los estados comprimidos son estados Gaussianos monomodo que tienen una incertidumbre menor, en una de sus cuadraturas, que la de un estado coherente. Al igual que el estado coherente, este estado comprimido es un estado de incertidumbre mínima, pero con incertidumbres de  $\hat{q}_i$  y  $\hat{p}_i$  desiguales.

#### 2.5.19. Estados two-mode squeezed vacuum (TMSV)

Se considera ahora un estado cuántico que implica dos modos del campo electromagnético definidos por los operadores *annihilation*  $\hat{a}_1$  y  $\hat{a}_2$ . Un estado



cuántico puro de un campo de dos modos se denomina separable si puede escribirse como producto de un estado del modo  $\hat{a}_1$  y un estado del modo  $\hat{a}_2$ :  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$ . Un estado cuántico que no puede escribirse de esta forma se denomina entrelazado.

El entrelazamiento cuántico, es un fenómeno de la mecánica cuántica que contradice a la intuición. Dos partículas entrelazadas, como por ejemplo un par de fotones, tienen características correlacionadas que se conservan aunque estén separadas. Y cuando se mide el estado de una de las partículas, el estado de la otra queda determinado de manera instantánea. Este fenómeno se reduce al hecho de que no se puede extraer información de una de las partículas sin perturbar a la otra. La información máxima que puede extraerse del sistema es la información conjunta de ambas partículas. Este fenómeno no tiene análogo desde una perspectiva clásica [1].

Un estado entrelazado de dos modos que es esencial para *quantum illumination* es el estado *two-mode squeezed vacuum*

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_s^n}{(N_s + 1)^{n+1}}} |n\rangle_1 |n\rangle_2 \quad (2.52)$$

Donde  $N_s$  es el número promedio de fotones de cada modo, i.e.,  $\langle \hat{n}_1 \rangle = \langle \hat{n}_2 \rangle = N_s$  y  $|n\rangle_1$  y  $|n\rangle_2$  representan a los estados de Fock de  $n$  fotones en el modo 1 y  $n$  fotones en el modo 2, respectivamente. Este estado también es Gaussiano con vector medio  $\bar{x} := \langle \hat{x} \rangle = [0, 0, 0, 0]^T$  y matriz de covarianza

$$V = \begin{pmatrix} S & 0 & C_q & 0 \\ 0 & S & 0 & -C_q \\ C_q & 0 & S & 0 \\ 0 & -C_q & 0 & S \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Donde  $S = 2N_s + 1$  y  $C_q = 2\sqrt{N_s(N_s + 1)}$

En la figura 2.9, se muestran los marginales de las funciones de Wigner del estado TMSV. En las dos imágenes superiores, se ve que las distribuciones de probabilidad para las cuadraturas de un mismo modo son idénticas a las de un estado térmico y por lo tanto no revelan ninguna correlación. Por otro lado, en las dos imágenes inferiores, se observa que las distribuciones de probabilidad  $P(p_1, p_2)$  y  $P(q_1, q_2)$  están fuertemente comprimidas a lo largo de una dirección específica. En particular, las cuadraturas de posición  $q$  están correlacionadas,

mientras que las cuadraturas de momento  $p$  están anticorrelacionadas. Esto es evidencia de fuertes correlaciones cruzadas causadas por el entrelazamiento [14].

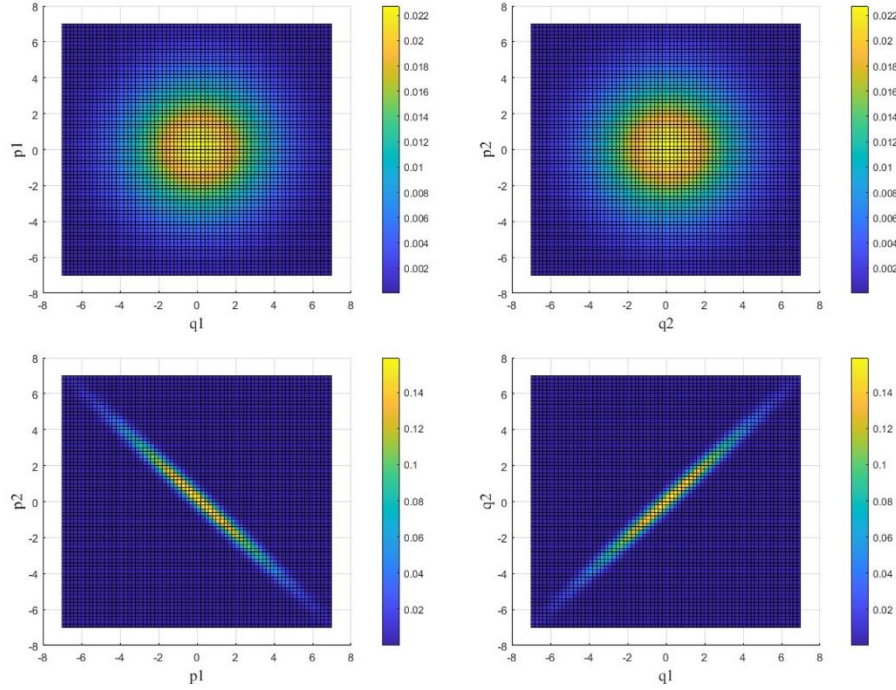


Fig 2.9. Marginales de la función de Wigner de un estado *two-mode squeezed vacuum* con número promedio de fotones  $N_s = 3$ . La fila superior muestra la distribución de las cuadraturas  $q$  y  $p$  de cada uno de los modos. La fila inferior muestra la correlación entre los modos.

### 2.5.20. Radar clásico vs radar cuántico

Una vez introducidos todos los conceptos anteriores se puede comenzar a describir el radar cuántico. Sin embargo, es interesante hacer primero una breve comparación entre el funcionamiento de un radar clásico y uno cuántico para resaltar sus diferencias.

En el caso del radar clásico, se transmite una señal electromagnética a una zona en el aire donde se sospecha que puede haber un blanco y para obtener información se mide la luz de retorno.

En el caso cuántico, se genera un par de fotones entrelazados. Uno se transmite a una zona del aire y el otro se mantiene en el receptor. Para obtener información se realiza una medición conjunta entre el fotón que regresa y el que se ha almacenado.

### 2.5.21. Quantum illumination

El sistema que se plantea en este trabajo estará basado en un protocolo llamado *quantum illumination*. Se utilizará la descripción que se puede encontrar en la tesis doctoral de Si Hui Tan [10]. Este es un protocolo de detección cuántica de objetivos basado en la propiedad del entrelazamiento, el cual tiene como objetivo discriminar entre dos hipótesis: blanco presente o ausente, en una posición en el espacio.

Existe una gran esperanza en que las propiedades de los fotones entrelazados permitirán sobrepasar el límite clásico de rango y resolución, sin embargo, se ha vuelto claro que los estados entrelazados son muy frágiles y podrían fácilmente ser destruidos al propagarse hacia el objetivo y de vuelta. Sin embargo, el protocolo de *quantum illumination* mantiene la creencia de que a pesar de que el estado entrelazado se destruya, aún queda una cierta dependencia mutua llamada correlación cuántica [23]. Es importante mencionar que este es un protocolo solo de detección de objetivos y que hasta la fecha no se ha desarrollado ningún protocolo de alcance eficiente. Se ha comprobado que estos suponen un gran reto y que más investigación es necesaria para lograr diseñar un protocolo cuántico de detección y alcance, sin embargo, ya existen algunas propuestas interesantes comentadas en [24].

### 2.5.22. Diagrama de bloques del radar cuántico basado en *quantum illumination*

En la figura 2.10, se presenta el diagrama de bloques del funcionamiento del radar cuántico.

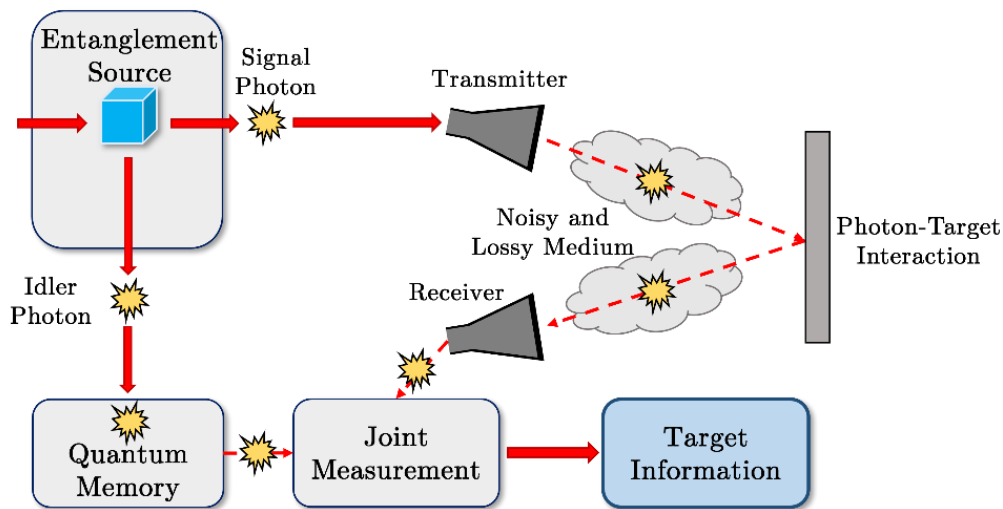


Fig 2.10. Diagrama de bloques del radar cuántico.

El primer paso es generar pares de fotones entrelazados altamente correlacionados, a uno de ellos se le llama el fotón *idler* o de referencia, y al otro se le llama fotón *signal*.

El fotón *signal* se transmite a través de un medio ruidoso y con pérdidas, y se utiliza para interrogar una región distante del espacio en la que se sospecha que puede haber un blanco presente.

El fotón *idler* se mantiene almacenado en una memoria en el receptor.

Si hay un blanco presente, el fotón de la señal puede reflejarse y volver al receptor del radar. De lo contrario, el radar sólo recibe fotones de ruido. En cualquiera de los dos casos, a la señal que se recibe en el receptor se le llama señal o modo de retorno (*return signal*).

Cada fotón recibido es comparado con el *idler* que se ha mantenido almacenado a través de una medida conjunta. Los fotones *signal* pueden ser probabilísticamente distinguidos de los de ruido gracias a las correlaciones causadas por el entrelazamiento, aun cuando las pérdidas y ruido del canal hayan logrado romperlo.

A continuación, se explicarán con mayor detalle los tres bloques principales del sistema, el transmisor, el canal y el receptor.

### 2.5.23. Transmisor

El transmisor debe ser capaz de generar pares de fotones máximamente entrelazados. Para generarlos se puede utilizar un proceso conocido como *spontaneous parametric down-conversion* (SPDC). Este proceso consiste en hacer incidir un haz de alta frecuencia ( $f_p$ ) en un medio no lineal, lo cual produce dos haces de menor frecuencia, llamados normalmente haz de señal (*signal*) y haz de referencia (*idler*), de manera que se cumpla la siguiente ecuación:  $f_p = f_s + f_i$ . Este concepto puede verse también como un único fotón que produce otros dos, uno de señal y uno de referencia con frecuencias que cumplen con la conservación de la energía [23]. En particular, para generar los estados *two-mode squeezed vacuum* se pasan dos estados *squeezed vacuum* monomodo a través de los puertos de un beamsplitter balanceado (50-50). Se puede ver una representación gráfica en la figura 2.11.

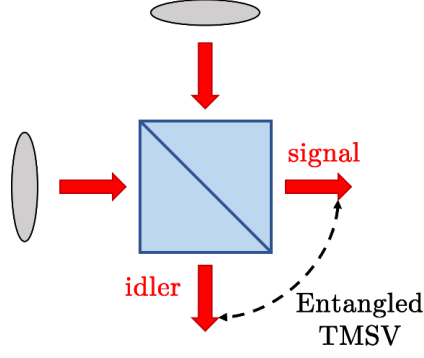


Fig 2.11. Uso de un *beamsplitter* para crear el estado TMSV. Los dos modos de salida están entrelazados.

Este proceso genera estados Gaussianos TMSV, los cuales son los estados que muestran el entrelazamiento más fuerte. La ecuación que describe al estado es la siguiente

$$|\Psi\rangle_{SI} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_s^n}{(N_s + 1)^{n+1}}} |n\rangle_s |n\rangle_I \quad (2.54)$$

Donde  $N_s$  es el número promedio de fotones en cada modo, i.e.,  $\langle \hat{n}_I \rangle = \langle \hat{n}_S \rangle = N_s$  y  $|n\rangle_s$  y  $|n\rangle_I$  representan los estados de Fock de  $n$  fotones *signal* y  $n$  fotones *idler*, respectivamente. Asumiendo este estado como puro, ya que está perfectamente preparado y es conocido por el transmisor, se puede expresar como el operador de densidad

$$\hat{\rho}_{SI} = |\Psi\rangle_{SI} \langle \Psi|_{SI} \quad (2.55)$$

Como se ha mencionado anteriormente, este estado es Gaussiano, por lo que queda completamente definido a través de un vector medio y una matriz de covarianza. Al ser un estado de dos modos, se necesitan dos pares de operadores de cuadratura, uno para cada modo

$$\hat{x} = (\hat{q}_S, \hat{p}_S, \hat{q}_I, \hat{p}_I)^T \quad (2.56)$$

Donde los subíndices (S) hacen referencia al modo *signal* y (I) al modo *idler*. Por ende, el vector medio será el siguiente

$$\bar{x} := \langle \hat{x} \rangle = \begin{bmatrix} Tr(\hat{q}_S \hat{\rho}_{SI}) \\ Tr(\hat{p}_S \hat{\rho}_{SI}) \\ Tr(\hat{q}_I \hat{\rho}_{SI}) \\ Tr(\hat{p}_I \hat{\rho}_{SI}) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Y la matriz de covarianza será

$$V = \begin{pmatrix} 2N_s + 1 & 0 & 2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 \\ 0 & 2N_s + 1 & 0 & -2\sqrt{N_s(N_s + 1)} \\ 2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & 2N_s + 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & 2N_s + 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Los términos que están fuera de la diagonal de la matriz son los que muestran la correlación existente entre los fotones *signal* y los *idler*.

En el proceso de transmisión no se quiere generar un único estado. El objetivo es generar muchas copias ( $M$ ) del estado TMSV para enviarlas hacia el posible blanco. Este número de copias está limitado por el producto *time-bandwidth* del proceso de SPDC

$$M = TW \quad (2.59)$$

Donde  $T$  es la duración del pulso y  $W$  es el ancho de banda de adaptación de fase (*phase-matching bandwidth*) [14].

#### 2.5.24. Canal e interacción con el blanco

La descripción de lo que el canal causa sobre los estados cuánticos transmitidos dependerá de la hipótesis bajo la cual se esté trabajando. El objetivo es discriminar entre las dos hipótesis posibles: blanco ausente o blanco presente, como se muestra en la figura 2.12

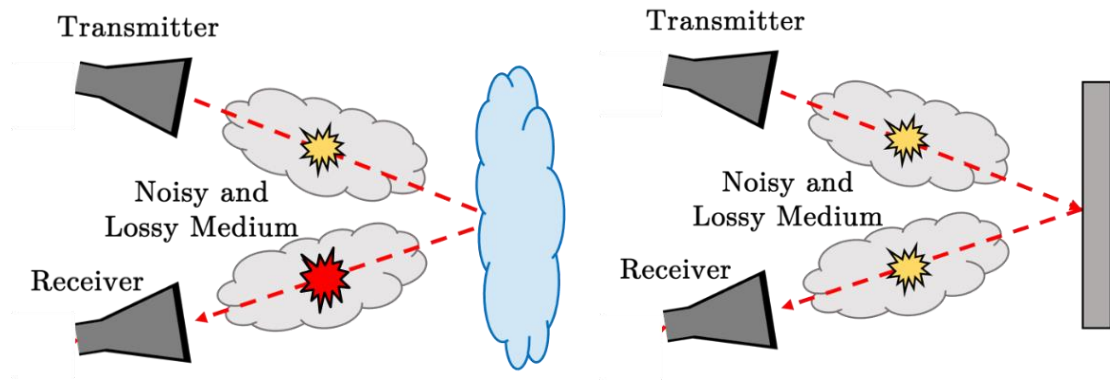


Fig 2.12. Diagrama de las hipótesis de detección de *quantum illumination*. Izquierda,  $H_0$ : blanco ausente. Derecha,  $H_1$ : blanco presente.

##### 2.5.24.1. Hipótesis $H_0$ : Blanco ausente

Bajo esta hipótesis los modos *signal* transmitidos se pierden y el modo de retorno que recibe el radar está compuesto solo por fotones de ruido. Este modo se representa usando estados térmicos  $\hat{\rho}_{N_T}$  de la forma (2.48) con  $N_{T_{H_0}} = N_T$  fotones

en promedio. Como el modo *signal* se ha perdido, el modo *idler* se representa también utilizando estados térmicos  $\hat{\rho}_{N_S}$ , con  $N_S$  fotones en promedio.

Como resultado, se obtiene en el receptor un estado al cual se le llama *return-idler*  $\hat{\rho}_{RI}^{(0)}$  y el cual se representa como un producto tensorial de ambos estados independientes  $\hat{\rho}_{RI}^{(0)} = (\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{N_S})$  [25].

Se debe tener en cuenta que el par de operadores de cuadratura del modo *signal* se sustituye por los del ruido térmico, indicándolos con el subíndice (T)

$$\hat{x} = (\hat{q}_T, \hat{p}_T, \hat{q}_I, \hat{p}_I)^T \quad (2.60)$$

Y por ende, para calcular el vector medio y la matriz de covarianza de este estado conjunto se aplican las siguientes operaciones:

$$\bar{x} := \langle \hat{x} \rangle = \begin{bmatrix} Tr(\hat{q}_T \hat{\rho}_{RI}^{(0)}) \\ Tr(\hat{p}_T \hat{\rho}_{RI}^{(0)}) \\ Tr(\hat{q}_I \hat{\rho}_{RI}^{(0)}) \\ Tr(\hat{p}_I \hat{\rho}_{RI}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tr(\hat{q}_T \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{N_S}) \\ Tr(\hat{p}_T \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{N_S}) \\ Tr(\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{q}_I \hat{\rho}_{N_S}) \\ Tr(\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{p}_I \hat{\rho}_{N_S}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza son los siguientes:

$$V_{11} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{q}_T, \hat{q}_T\} \rangle = 2N_T + 1 \quad (2.62)$$

$$V_{22} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{p}_T, \hat{p}_T\} \rangle = 2N_T + 1 \quad (2.63)$$

$$V_{33} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{q}_I, \hat{q}_I\} \rangle = 2N_S + 1 \quad (2.64)$$

$$V_{44} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{p}_I, \hat{p}_I\} \rangle = 2N_S + 1 \quad (2.65)$$

Los cálculos completos pueden verse en el Anexo A.

Todos los elementos fuera de la diagonal valdrán cero debido a que no existe entrelazamiento ni correlación entre el modo *idler* y el de ruido. Dando como resultado la siguiente matriz:

$$V_0 = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Donde  $B = 2N_T + 1$  y  $S = 2N_S + 1$  [14].

### 2.5.24.2. Hipótesis $H_1$ : Blanco presente

Bajo esta hipótesis una porción de los fotones *signal* se reflejarán en el blanco y el resto de ellos se perderán. Los fotones reflejados se mezclan con un baño térmico y se atenúa la correlación que existe con los fotones *idler*. En este caso el modo de retorno que se recibe en el receptor es una mezcla entre fotones *signal* y fotones térmicos. El estado *return-idler* que se asume que llega al receptor es el siguiente  $\hat{\rho}_{RI}^{(1)} = (\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{TMSV})$ , donde  $\hat{\rho}_{N_T}$  es el estado térmico que representa al ruido de fondo, con un número promedio de fotones  $N_{T_{H1}} = \frac{N_T}{1-\kappa}$  y  $\hat{\rho}_{TMSV}$  es un estado TMSV que mantiene una correlación entre los modos *signal* e *idler* [10].

Para hacer la mezcla de modos se modela el blanco como un beamsplitter con parámetro  $\kappa \ll 1$ , el cual indica el porcentaje de señal que se refleja (este parámetro incluye las pérdidas del camino ida y vuelta, así como la baja reflectividad del blanco) y matriz de transformación [22]

$$B(\kappa) := \begin{bmatrix} \sqrt{1-\kappa} \mathbb{I} & \sqrt{\kappa} \mathbb{I} \\ -\sqrt{\kappa} \mathbb{I} & \sqrt{1-\kappa} \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

En el diagrama de la figura 2.13 se muestra lo que ocurre. Por uno de los puertos del beamsplitter entran los modos *signal*, representados por su operador *annihilation*  $\hat{a}_S$  y por el otro el baño térmico, representado con estados térmicos y el operador *annihilation*  $\hat{a}_T$ . Ocurren las pérdidas de acuerdo con el parámetro  $\kappa \ll 1$  y se obtiene el modo de retorno, representado por el modo mezcla  $\hat{a}_R = \sqrt{\kappa}\hat{a}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{a}_T$ .

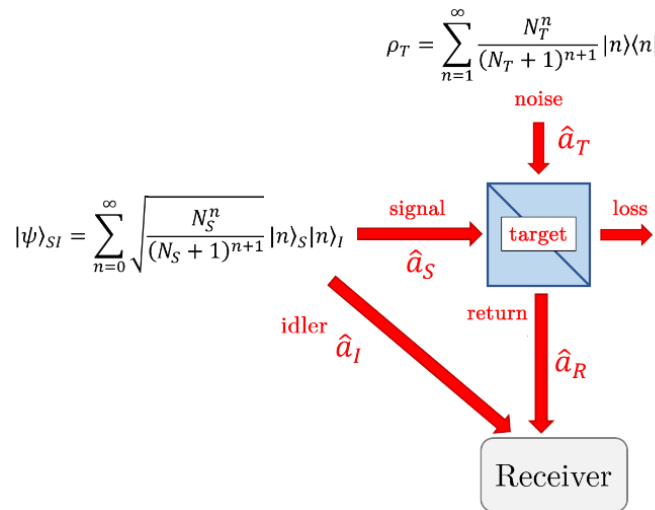


Fig 2.13. Representación de la interacción del modo *signal* con el blanco.

Esta mezcla se puede aplicar de manera más simple directamente a los operadores de cuadratura, obteniendo el siguiente resultado:



$$\hat{x} := \begin{bmatrix} \sqrt{\kappa}\hat{q}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{q}_T \\ \sqrt{\kappa}\hat{p}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{p}_T \\ \hat{q}_I \\ \hat{p}_I \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

El desarrollo completo se puede observar en el Anexo B. El vector medio puede calcularse como

$$\bar{x} := \langle \hat{x} \rangle = \begin{bmatrix} Tr(\hat{q}_R \hat{\rho}_{RI}^{(1)}) \\ Tr(\hat{p}_R \hat{\rho}_{RI}^{(1)}) \\ Tr(\hat{q}_I \hat{\rho}_{RI}^{(1)}) \\ Tr(\hat{p}_I \hat{\rho}_{RI}^{(1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

El siguiente paso es obtener los elementos de la matriz de covarianza. Debido a la longitud de los cálculos estos se muestran en el Anexo C. Los elementos de esta matriz son

$$V_{11} = V_{22} = 2\kappa N_S + 2N_T + 1 \quad (2.70)$$

$$V_{33} = V_{44} = 2N_S + 1 \quad (2.71)$$

$$V_{13} = \sqrt{\kappa}C_q = 2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} \quad (2.72)$$

$$V_{24} = -\sqrt{\kappa}C_q = -2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} \quad (2.73)$$

Finalmente, sabiendo que esta es simétrica, se puede construir la matriz de covarianza como

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2\kappa N_S + 2N_T + 1 & 0 & 2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} & 0 \\ 0 & 2\kappa N_S + 2N_T + 1 & 0 & -2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} \\ 2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} & 0 & 2N_S + 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} & 0 & 2N_S + 1 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Si se compara esta matriz con la del estado TMSV inicial se puede apreciar que los términos fuera de la diagonal principal se ven ahora atenuados por el factor  $\sqrt{\kappa}$ . Estos son los elementos que indican la correlación existente entre el modo recibido y el almacenado como referencia. Aunque esta atenuación puede destruir el entrelazamiento inicial, las correlaciones supervivientes brindan suficiente información como para distinguir entre hipótesis de forma probabilística [14].

### 2.5.25. Sobre el ruido térmico

En la hipótesis  $H_0$  se definen estados térmicos que representan el ruido de fondo. Estos estados tienen un número promedio de fotones  $N_{T_{H_0}} = N_T$ , donde  $N_T$  se define a partir de la ecuación (2.49) y depende de la frecuencia y la temperatura.

En la hipótesis  $H_1$  se ha hecho una amplificación de este valor,  $N_{T_{H1}} = \frac{N_T}{1-\kappa}$ , por un factor  $(1 - \kappa)$ . Esto se debe a que al modelar el blanco como un beamsplitter el baño térmico que entra por uno de los puertos se ve atenuado por la matriz de transformación en un factor de  $(1 - \kappa)$ . Es como si el blanco estuviese proyectando una “sombra” sobre el fondo ruidoso. Lo que se quiere es que bajo ambas hipótesis la misma cantidad de fotones de ruido llegue al receptor, asumiendo que un objeto que se encuentra en un espacio a temperatura  $T$  radiará también a esa misma temperatura. Por este motivo, para eliminar esta “sombra” en la hipótesis  $H_1$  se amplifica el valor promedio de fotones térmicos [10].

### 2.5.26. Relación señal a ruido (SNR)

Un parámetro que es importante tener en cuenta y que resultará útil para entender ejemplos en epígrafes siguientes es la relación señal a ruido [14]. Esta se define como la proporción entre la potencia de la señal recibida y la potencia del ruido de fondo y se puede expresar a través de la siguiente aproximación:

$$SNR \approx \frac{M\kappa N_s}{N_T} \quad (2.75)$$

### 2.5.27. Discriminación entre hipótesis

El objetivo final es poder distinguir entre las dos hipótesis anteriormente expuestas, es decir, poder distinguir entre los dos estados cuánticos que llegan al receptor.

Cuando las dos hipótesis son igualmente probables, la regla de decisión de mínima probabilidad de error para un receptor basado en *quantum illumination* es la siguiente. Se mide el operador  $\hat{\rho}_{RI}^{(1)} - \hat{\rho}_{RI}^{(0)}$  y se declara que el blanco está presente si el resultado es un valor no negativo, y en caso contrario se declara que el blanco está ausente. Suponiendo que se tienen los eigenvalores no negativos de  $\hat{\rho}_{RI}^{(1)} - \hat{\rho}_{RI}^{(0)}$ , representados como  $\{\gamma_n^{(+)}\}$ , se puede obtener la probabilidad de error de un receptor cuántico óptimo para el transmisor de *quantum illumination* como

$$\Pr(e) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_n \gamma_n^{(+)} \right) \quad (2.76)$$

Desafortunadamente, encontrar los eigenvalores de  $\hat{\rho}_{RI}^{(1)} - \hat{\rho}_{RI}^{(0)}$  es una tarea de enormes proporciones, por lo que, como se hace a menudo en teoría de la comunicación, se establecen límites a esta probabilidad de error.

Antes de introducir estos límites es importante comentar el sistema clásico con el que se va a comparar el radar cuántico, haremos referencia a este como *classical illumination*. Se asume que el radar clásico utiliza un transmisor de estados coherentes con número medio de fotones igual a  $N_s$ . Tanto en el caso clásico como cuántico se supone el uso de receptores óptimos.

Para lograr probabilidades de error aceptablemente bajas se deben utilizar una cantidad  $M \gg 1$  de transmisiones idénticas de ambos tipos de estados y se deben realizar medidas cuánticas conjuntas de manera óptima.

Para ambos sistemas se transmitirán  $M$  copias o  $M$  modos del estado. Para la discriminación cuántica óptima entre un par de estados equiprobables de  $M$  modos se tienen los límites superior e inferior de la probabilidad de error según Bhattacharyya

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \left[ \text{tr} \left( (\hat{\rho}^{(0)})^{\frac{1}{2}} (\hat{\rho}^{(1)})^{\frac{1}{2}} \right) \right]^{2M}} \right) \leq \text{Pr}(e) \leq \frac{1}{2} \left[ \text{tr} \left( (\hat{\rho}^{(0)})^{\frac{1}{2}} (\hat{\rho}^{(1)})^{\frac{1}{2}} \right) \right]^M \quad (2.77)$$

En otras palabras, se pueden obtener los límites superior e inferior de la probabilidad de error de discriminación entre las dos hipótesis posibles, cuando se transmiten  $M$  copias del estado original hacia el posible blanco [26].

De nuevo el cálculo de las trazas en las expresiones anteriores no es una tarea sencilla, por lo que los límites de la probabilidad de error pueden aproximarse utilizando la distancia de Bhattacharyya  $B$

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - e^{-2MB}} \right) \leq \text{Pr}(e) \leq \frac{1}{2} e^{-MB} \quad (2.78)$$

Donde  $B = \kappa N_s (\sqrt{N_T + 1} - \sqrt{N_T})^2$  en *classical illumination* y  $B \approx \frac{\kappa \gamma_s}{N_T}$  en el caso de *quantum illumination*, donde

$$\gamma_s = \frac{N_s(1 + N_s)[1 + N_s - \sqrt{N_s(1 + N_s)}]}{1 + N_s + \sqrt{N_s(1 + N_s)}} \quad (2.79)$$

Cuando el número promedio de fotones es mucho menor que uno  $N_s \ll 1$ , puede asumirse que  $\gamma_s \approx N_s$ .

Finalmente, asumiendo altas pérdidas y un blanco con baja reflectividad  $\kappa \ll 1$ , una transmisión de una señal muy débil  $N_s \ll 1$  y un entorno muy ruidoso  $N_T \gg 1$ , se pueden obtener las siguientes aproximaciones [27]:

Para *classical illumination*, se utilizan los límites de Chernoff

$$\frac{1}{4} e^{-M \frac{\kappa N_s}{2N_T}} \leq \Pr(e) \leq \frac{1}{2} e^{-M \frac{\kappa N_s}{4N_T}} \quad (2.80)$$

Y para *quantum illumination*, los límites de Bhattacharyya

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - e^{-2M \frac{\kappa N_s}{N_T}}} \right) \leq \Pr(e) \leq \frac{1}{2} e^{-M \frac{\kappa N_s}{N_T}} \quad (2.81)$$

Comparando las expresiones de los límites superiores de ambos sistemas se puede apreciar que el exponente, en el caso de *quantum illumination*, es cuatro veces mayor que el de *classical illumination*, dando una ventaja de 6 dB en el exponente del caso cuántico respecto al clásico. En la figura 2.14 se muestra una comparación, extraída de la literatura disponible, de estos límites de probabilidad de error para unos valores de  $N_T = 20$ ,  $\kappa = 0.01$  y  $N_s = 0.01$ .

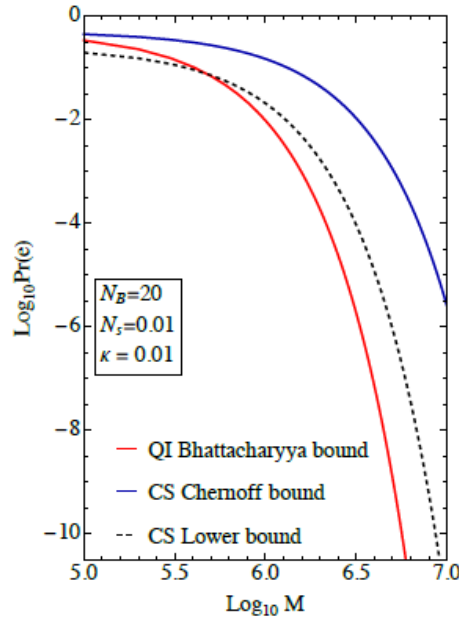


Fig 2.14. Límites superiores de la probabilidad de error del sistema clásico (azul) y cuántico (rojo) y límite inferior del sistema clásico (negro) en función del número de copias  $M$  del estado TMSV, para  $N_s = 0.01$  [14].

En esta figura se puede observar que para los valores elegidos el límite superior del radar cuántico se encuentra por debajo del límite inferior del sistema clásico a partir de un cierto valor de  $M$ . Esto indica que es posible que los estados

entrelazados funcionen mejor que los estados coherentes, incluso en el peor de los casos para los primeros.

Sin embargo, la ventaja que existe entre estos dos sistemas se vuelve cada vez menos importante a medida que aumenta el valor  $N_S$ , hasta que desaparece para valores mucho mayores que uno ( $N_S \gg 1$ ) [14]. En la figura 2.15 se muestra un ejemplo de este caso, con los valores  $N_T = 20$ ,  $\kappa = 0.01$  y  $N_S = 1$ .

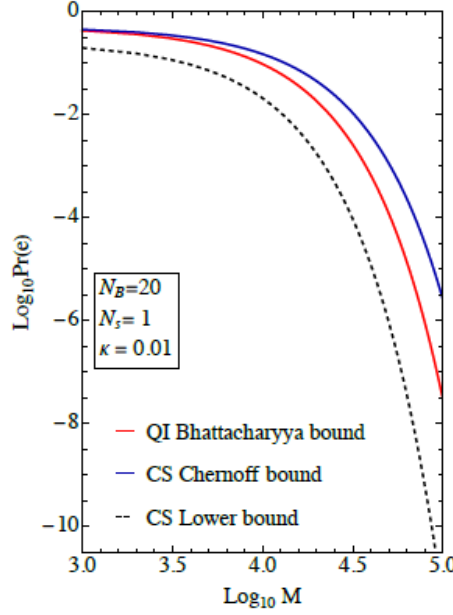


Fig 2.15. Límites superiores de la probabilidad de error del sistema clásico (azul) y cuántico (rojo) y límite inferior del sistema clásico (negro) en función del número de copias  $M$  del estado TMSV para un  $N_S = 1$  [14].

Esto puede entenderse considerando que la ventaja en el caso cuántico se origina de la información extra, dada por las correlaciones, que brinda la condición de entrelazamiento. Esta información podría traducirse, por ejemplo, en unos pocos fotones extra en un proceso de conteo de fotones. Si las señales que se quieren distinguir tienen una gran cantidad de fotones, unos pocos extra no serán de mucha ayuda, sin embargo, cuando la cantidad es pequeña (en comparación con los extra) una cantidad de información extra, por pequeña que sea, puede dar una ventaja a la hora de distinguir entre las hipótesis.

La poca información brindada por el entrelazamiento se vuelve menos relevante a medida que aumenta la cantidad de fotones (la cantidad de información) que se tiene sobre la presencia o ausencia del blanco.

Otra manera interesante de comparar estos sistemas es en función de su relación señal a ruido. En la figura 2.16 se muestra una comparación entre los límites

superiores de la probabilidad de error del sistema clásico basado en estados coherentes (curva de guiones), del cuántico (línea sólida) y de uno clásico descrito por las fórmulas de Albersheim (línea punteada) en función de la SNR en dB. En este análisis solo se considerarán las primeras dos curvas, ya que las fórmulas de Albersheim no han sido comentadas en este trabajo.

Esta gráfica se obtuvo para un valor fijo de  $M = 10^9$  y variando el valor de  $N_S$ .

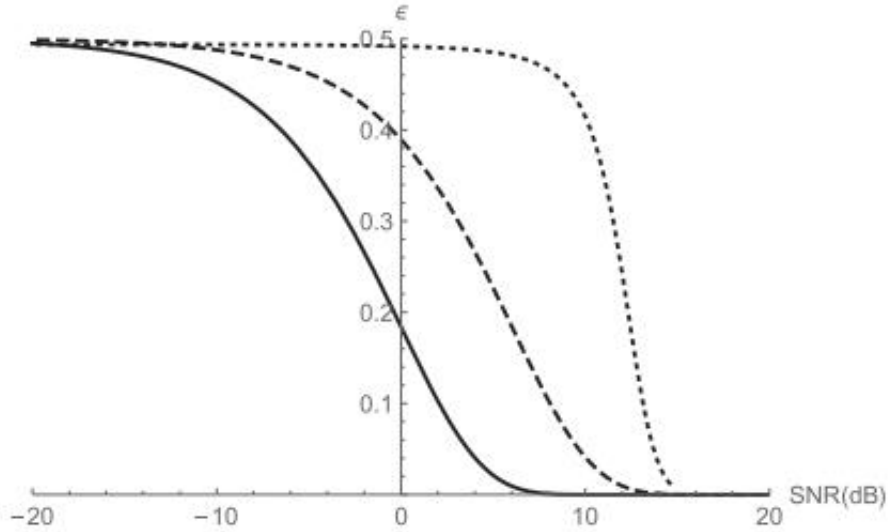


Fig 2.16. Límites superiores de la probabilidad de error de detección de un radar cuántico basado en entrelazamiento (línea sólida), uno clásico basado en estados coherentes (línea de guiones) y uno clásico descrito por las fórmulas de Albersheim (línea punteada) en función de la SNR en dB [24].

En la figura 2.16 se puede observar como el sistema cuántico presenta una ventaja respecto al clásico para valores bajos de la SNR. Un aspecto interesante de esta representación es ver como ambos sistemas tienen la misma tendencia. A medida que aumenta la SNR ambas probabilidades de error mejoran hasta que para valores muy altos estas convergen prácticamente a 0. De igual manera, para valores muy bajos de SNR ambos sistemas comienzan a tender a un resultado aleatorio.

#### 2.5.28. Receptor. Optical parametric amplifier (OPA)

Como se ha comentado, a diferencia del transmisor de estados coherentes, el transmisor basado en entrelazamiento da lugar a estados conjuntos *return-idler* de media cero en ambas hipótesis. El único factor distintivo entre las dos hipótesis que hace que *quantum illumination* sea superior a *classical illumination* son los términos no-diagonales de la matriz de covarianza  $V_1$ , los cuales contienen las

correlaciones supervivientes de los modos *return-idler* cuando el blanco está presente.

Un receptor que permite realizar medidas conjuntas de estos modos, explotando así la información brindada por el entrelazamiento, puede implementarse con un OPA. Este receptor, propuesto por [25] mapea las correlaciones cruzadas en un conteo de fotones. Este combina los modos de retorno  $\hat{a}_R^{(k)}$  e *idler*  $\hat{a}_I^{(k)}$ , donde  $k$  indica el índice del modo  $1 \leq k \leq M$ , produciendo los siguientes modos de salida:

$$\hat{c}^{(k)} = \sqrt{G}\hat{a}_I^{(k)} + \sqrt{G-1}\hat{a}_R^{\dagger(k)} \quad (2.82)$$

$$\hat{d}^{(k)} = \sqrt{G}\hat{a}_R^{(k)} + \sqrt{G-1}\hat{a}_I^{\dagger(k)} \quad (2.83)$$

Donde  $G$  es la ganancia del OPA, la cual suele expresarse como  $G = 1 + \epsilon^2$  y  $\epsilon^2 = \frac{N_S}{\sqrt{N_T}}$ . En la figura 2.17 se muestra un diagrama de este receptor.

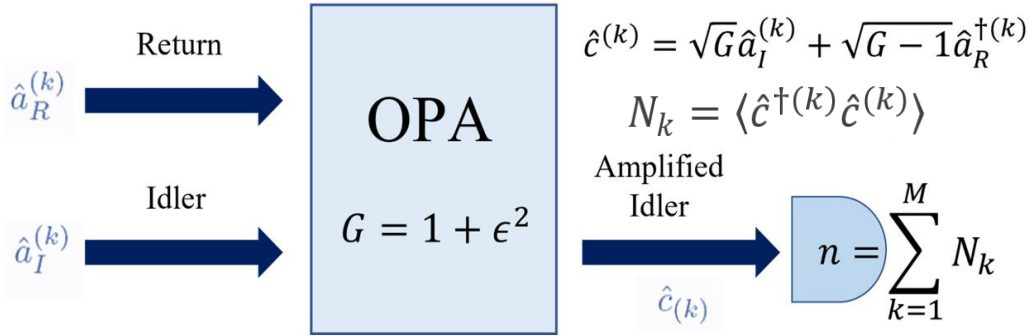


Fig 2.17. Representación esquemática del receptor OPA.

A continuación, se cuentan los fotones en el modo  $\hat{c}^{(k)}$  como  $N_k = \langle \hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} \rangle$ . Para cada hipótesis el cálculo del número promedio de fotones recibido por modo ( $k$ ) es el siguiente:

$$N_0 = \langle \hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} \rangle = Tr(\hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} \hat{\rho}_{RI}^{(0)}) = Tr(\hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} (\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{N_S})) \quad (2.84)$$

$$N_1 = \langle \hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} \rangle = Tr(\hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} \hat{\rho}_{RI}^{(1)}) = Tr(\hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} (\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{TMSV})) \quad (2.85)$$

Tras sustituir en estas ecuaciones las expresiones conocidas  $\hat{c}^{(k)} = \sqrt{G}\hat{a}_I^{(k)} + \sqrt{G-1}\hat{a}_R^{\dagger(k)}$  y  $\hat{a}_R^{(k)} = \sqrt{\kappa}\hat{a}_S^{(k)} + \sqrt{1-\kappa}\hat{a}_T^{(k)}$  y realizar todas las operaciones matemáticas se obtienen los siguientes resultados

$$N_0 = GN_S + (G-1)(1+N_T) \quad (2.86)$$

$$N_1 = GN_S + (G-1)(1+N_T + \kappa N_S) + 2\sqrt{G(G-1)}\sqrt{\kappa N_S(N_S+1)} \quad (2.87)$$

Este proceso se realiza para todos los modos recibidos dando como resultado final el número total de fotones o de *clicks*  $N$  registrados en los  $M$  modos recibidos

$$N = \sum_{k=1}^M N_k \quad (2.88)$$

Con este receptor se asume que la medida cuántica conjunta que es óptima para distinguir entre las dos hipótesis consiste en utilizar este número final de fotones  $N$ , contados en todos los  $M$  modos recibidos, para decidir usando un detector de umbral.

Debido a que la llegada de fotones a un receptor no es un proceso determinista (los fotones no llegan equiespaciados en el tiempo), sino que se trata como una variable aleatoria, el número total de fotones  $N$  tiene las siguientes funciones de densidad de probabilidad:

$$P_{N|H_m}(n|H_m) = \binom{n+M-1}{n} \frac{N_m^n}{(1+N_m)^{n+M}} \quad (2.89)$$

Donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $m = 0$  o  $1$ , según si se está bajo la hipótesis  $H_0$  o  $H_1$ , respectivamente. La mínima probabilidad de error que se puede alcanzar al distinguir entre las dos distribuciones  $P_{N|H_0}(n|H_0)$  y  $P_{N|H_1}(n|H_1)$ , usando  $M$  observaciones se encuentra limitada por el límite superior de Bhattacharyya

$$\Pr(e) \leq \frac{1}{2} e^{-MR_B} \quad (2.90)$$

Donde  $R_B \approx \frac{\kappa N_S}{2N_T}$ .

En la figura 2.18 se observa una comparación de la probabilidad de error de este receptor con los límites superiores de la probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico.

A la vista de esta comparación se puede concluir que el receptor implementado con un OPA puede lograr una ganancia de 3 dB en el exponente de error, respecto al caso clásico. Como este no es capaz de saturar la máxima ganancia alcanzable por *quantum illumination* de 6 dB, se dice que es un receptor sub-óptimo [14].



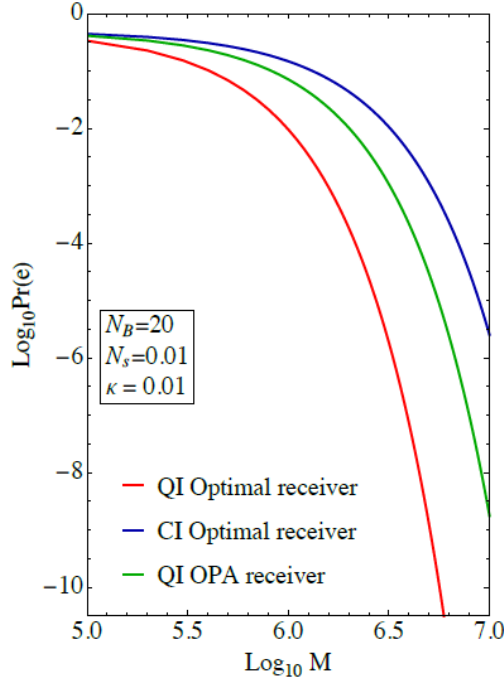


Fig 2.18. Límites superiores de la probabilidad de error del sistema clásico (azul) y cuántico (rojo), y probabilidad de error del receptor OPA (verde) [14].

Sin embargo, este presenta la ventaja de que es un sistema implementable con la tecnología actual y gracias al teorema central del límite para  $M \gg 1$ , las funciones  $P_{N|H_m}(n|H_m)$  pueden aproximarse como funciones de probabilidad Gaussianas de la forma  $N(m_m, \sigma_m)$

$$P_{N|H_0}(n|H_0) \sim N(MN_0, \sqrt{MN_0(N_0 + 1)}) \quad (2.91)$$

$$P_{N|H_1}(n|H_1) \sim N(MN_1, \sqrt{MN_1(N_1 + 1)}) \quad (2.92)$$

Por ende, para  $M \gg 1$  la probabilidad de error viene dada por:

$$P_{OPA-Gauss} = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{R_{OPA}M}) \approx \frac{e^{-MR_{OPA}}}{2\sqrt{\pi MR_{OPA}}} \quad (2.93)$$

Donde  $R_{OPA} = (N_1 - N_0)^2 / 2(\sigma_1 + \sigma_0)^2$

Como consecuencia, se ha transformado el problema de distinguir entre dos estados cuánticos al de distinguir entre dos distribuciones de probabilidad Gaussianas. Para esta última tarea se utiliza un detector de umbral dado por

$$N_{th} = \left\lceil \frac{M(\sigma_1 N_0 + \sigma_0 N_1)}{\sigma_1 + \sigma_0} \right\rceil \quad (2.94)$$

En el que se decide en favor de la hipótesis  $H_0$  (blanco ausente) cuando  $N < N_{th}$  y en favor de la hipótesis  $H_1$  (blanco presente), en caso contrario [25]. Este decisor puede observarse en la figura 2.19

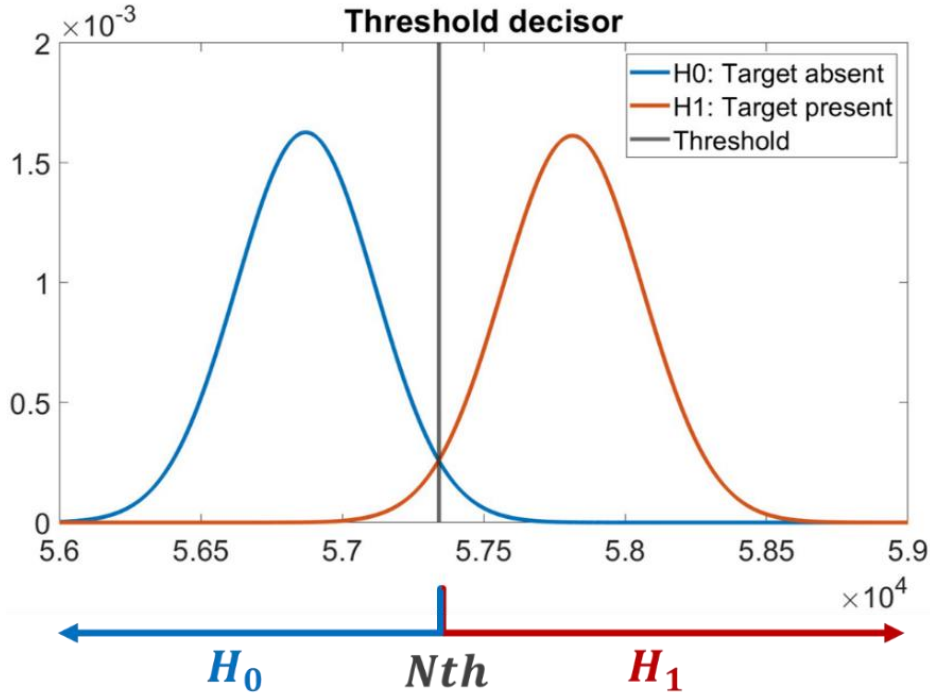


Fig 2.19. Representación del decisor de umbral de la aproximación Gaussiana del OPA.

#### 2.5.29. Probabilidad de error

Para medir el rendimiento del sistema se consideran cuatro posibles escenarios:

1. Se decide que  $H_0$  es verdad, cuando  $H_0$  es verdad.
2. Se decide que  $H_1$  es verdad, cuando  $H_0$  es verdad.
3. Se decide que  $H_1$  es verdad, cuando  $H_1$  es verdad.
4. Se decide que  $H_0$  es verdad, cuando  $H_1$  es verdad.

Los casos (1) y (3) se corresponden con decisiones correctas, mientras que los casos (2) y (4) se consideran errores. Al error (2) se le llamará error de falsa alarma, ya que se decide que hay un blanco presente cuando no lo hay, y al error (4) se le llamará error de pérdida ya que se decide que no hay un blanco presente cuando en realidad sí lo hay. Las probabilidades de que estos errores ocurran se llamarán probabilidad de falsa alarma  $P_{FA}$  y probabilidad de pérdida  $P_M$ , respectivamente [14].

Suponiendo que no se dispone de información previa sobre el sistema, se considera que ambas hipótesis tienen la misma probabilidad a priori,  $p(H_0) = 0,5$  y  $p(H_1) = 0,5$ . La probabilidad de error total se define como:

$$P_e = p(H_0)P_{FA} + p(H_1)P_M = 0.5(P_{FA} + P_M) \quad (2.95)$$

### 2.5.30. Sistema óptico vs. Sistema en microondas

El objetivo de este epígrafe es hacer una comparación breve de los componentes, procesos y parámetros que se utilizarían en el caso de frecuencias ópticas y de microondas.

Se han descrito hasta ahora todos estos aspectos en frecuencias ópticas:

- La generación de fotones entrelazados utilizando SPDC, la interacción de la señal con un medio ruidoso con un máximo de  $N_T \cong 20$  fotones térmicos en promedio, obtenidos a temperatura ambiente para una frecuencia de 300 GHz, y la medida cuántica conjunta utilizando un OPA.

En el caso de microondas estos componentes y valores podrían ser por ejemplo:

- Un convertidor electro-optomecánico para generar el entrelazamiento entre una señal de microondas y una a frecuencias ópticas, un medio ruidoso que puede tener un número de fotones térmicos del orden de  $10^4$  y un receptor basado en un *Josephson parametric amplifier*, el cual tendría un funcionamiento prácticamente igual al del OPA.

### 2.5.31. Limitaciones

#### 2.5.31.1. Régimen de baja potencia

Como puede observarse en la figura 2.16, el radar cuántico ofrece una ventaja en la probabilidad de error en comparación con el clásico cuando la potencia de la señal transmitida es muy baja, es decir para valores bajos de SNR. Sin embargo, hay que aclarar algunos aspectos sutiles sobre estas comparaciones. Éstas sólo son válidas cuando ambos sistemas tienen la misma SNR y no se puede hacer ninguna otra afirmación sobre el rendimiento de los radares clásicos y cuánticos, observando únicamente figuras como la 2.14. Por ejemplo, ambos sistemas podrían tener una SNR de 12 dB, pero el sistema clásico, implementado con componentes de bajo ruido, podría tener un alcance de detección de 2 km, mientras que el sistema cuántico, implementado con componentes ruidosos, sólo podría tener un alcance de 15 m. Esta comparación en función de la SNR no permite afirmar nada sobre ninguna otra característica de los sistemas como el alcance o la resolución.

### 2.5.31.2. Producto time-bandwidth $M$

El número de modos distinguibles  $M$  es llamado principalmente producto *time-bandwidth* ( $M = TW$ ), donde  $T$  es la duración del pulso y  $W$  es el ancho de banda.

Como ya se ha mencionado, para producir los estados entrelazados *signal-idler* se utiliza un proceso denominado SPDC. Este proceso sólo puede ocurrir en un rango finito de frecuencias denominado ancho de banda de coincidencia de fase (*phase-matching bandwidth*)  $W$ .

Como la ventaja del radar cuántico tiene lugar cuando se lanza una señal muy débil ( $N_s \ll 1$ ), y además se asume que los objetivos tienen baja reflectividad ( $\kappa \ll 1$ ), el valor de  $M$  debe ser muy grande para obtener una SNR suficiente alta como para lograr un buen alcance de detección.

A una frecuencia de unos 100 THz (frecuencias ópticas) un valor típico del ancho de banda sería  $W = 1 \text{ THz}$ , a esta frecuencia sería necesaria una duración de pulso de  $T = 1 \mu\text{s}$  para conseguir un producto *time-bandwidth*  $M = 10^6$ . En frecuencias de microondas el ancho de banda suele rondar los  $W = 100 \text{ MHz}$ , lo que obliga a que la duración del pulso sea de al menos  $T = 10 \text{ ms}$  para conseguir una  $M$  mayor. Un pulso de microondas de esta duración implicará que el blanco estará en movimiento mientras la zona es interrogada por los fotones *signal*. Esto provocaría un retardo variable de la señal de retorno lo que supone un problema, ya que la señal de retorno debe procesarse correctamente y retrasarse con precisión en el tiempo para realizar la medición conjunta con la señal *idler*.

### 2.5.31.3. Hardware

Por último, la implementación práctica del radar cuántico requiere una forma de almacenar los fotones *idler* hasta que llegue la señal de retorno para realizar una medición conjunta. Considerando un almacenamiento no ideal, las pérdidas podrían ser suficientes como para destruir la ventaja del sistema cuántico. Y además, el tiempo que el fotón puede almacenarse correctamente también limita el alcance del radar [14].

### 3. DESARROLLO

En este capítulo se expone el funcionamiento del programa realizado en MATLAB, el cual simula el sistema de radar cuántico explicado en el segundo capítulo.

Se explica la definición de los parámetros iniciales del sistema y de los estados cuánticos. Se simula la interacción de la señal de sondeo con el blanco así como el proceso de recepción de la señal utilizando un OPA. Después de cada parte del sistema se comprueba la correcta implementación a partir del cálculo del vector medio y de la matriz de covarianza.

Por último, se calcula la probabilidad de error del sistema cuántico, utilizando el método de Montecarlo, y se compara con los límites teóricos.

Antes de comenzar con el funcionamiento del programa es importante aclarar una serie de consideraciones:

1. En este programa no se considera la distancia hasta el blanco o geometría del mismo. Las pérdidas causadas por estos aspectos se incluyen en la reflectividad  $\kappa \ll 1$  característica del beamsplitter que se utiliza para modelar el blanco.
2. Se asume también que hay una perfecta sincronización y eficiencia en el proceso de medida, es decir, que se realizan las medidas conjuntas de los pares de fotones entrelazados correspondientes y sin fallos de detección.

### 3.1. Parámetros iniciales

El programa cuenta con una serie de parámetros que son fijos:

1. **Dimensión de las matrices (Parámetro `mat_dim`):** Este valor se ha fijado al máximo posible de 170 x 170 (limitado por la memoria). Esto se hace porque algunos de los estados que se representan tienen teóricamente dimensión infinita, por lo que al discretizarlos se obtienen mejores resultados cuanto más grandes sean las matrices.
2. **Matrices de los operadores *creation* y *annihilation*:** estas matrices tienen una dimensión igual a `mat_dim` + 1, es decir, 171 x 171, y tienen la siguiente forma

$$annihilation = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$creation = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

3. **Estados de Fock:** Para definir estos estados se utiliza una matriz identidad de dimensiones `mat_dim` + 1, es decir, 171 x 171. Cada una de las columnas representa un vector de estados con número de fotones de 0 a 170 fotones, de izquierda a derecha. La matriz es la siguiente:

$$number\_states = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Esta misma matriz se usa para definir los modos *signal* e *idler*.

### 3.2. Parámetros de entrada

A continuación, se comentan los parámetros que son editables en el programa y que permiten realizar distintas pruebas y simulaciones.

1. **Número promedio de fotones  $N_S$  de los modos *signal* e *idler*:** Este parámetro se define dentro del código como  $N_s$ .
2. **Número promedio de fotones térmicos  $N_T$ :** Este parámetro se define dentro del código como  $N_t$ .
3. **Reflectividad  $\kappa$  (incluyendo pérdidas ida y vuelta):** Este parámetro se define dentro del código como  $k$ .
4. **Número de modos o copias del estado transmitidas  $M$ :** Este parámetro se define como un rango, llamado  $M$ , con el fin de ver que efecto tiene su variación en la probabilidad de error.

### 3.3. Parámetros de salida (resultados)

El resultado del programa es una figura en la que se muestra la evolución de la probabilidad de error en función de  $M$  que se obtiene simulando el proceso de *quantum illumination* con un receptor basado en un OPA usando el método de Montecarlo. Esta evolución se muestra en comparación con las curvas teóricas de los límites de los sistemas clásico y cuántico. En la figura 3.1 se puede observar un ejemplo

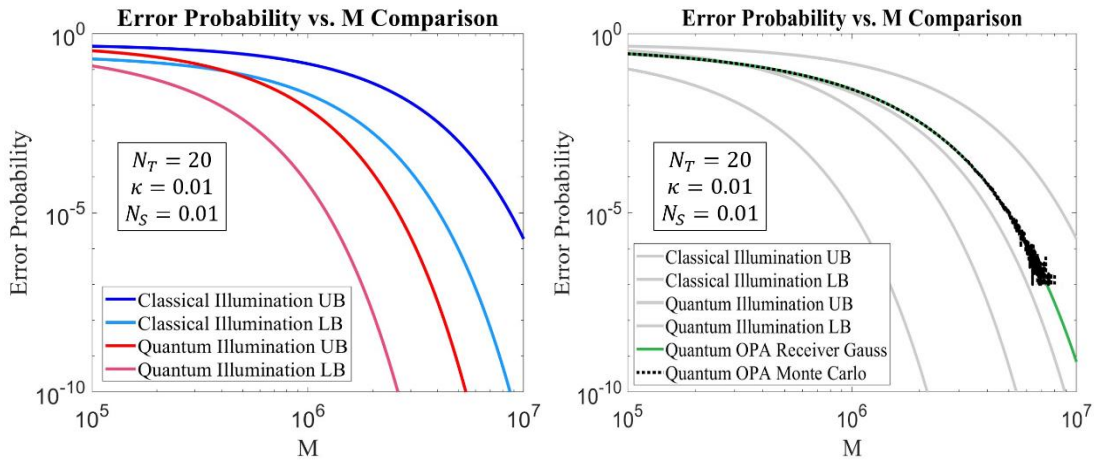


Fig 3.1. Ejemplo de las gráficas que se obtienen como resultado de la ejecución del programa.

### 3.4. Definición de los operadores de cuadratura

A partir de las ecuaciones (2.32) se obtienen las matrices que representan a los operadores de posición y momento del sistema.

### 3.5. Estado two-mode squeezed vacuum

El primer paso del sistema es la correcta generación de este estado de dos modos. Estos se simulan siguiendo la ecuación (2.54).

Debido a que se han generado 171 estados de Fock, el sumatorio de esta ecuación tendrá 171 elementos. En el programa se calcula el factor multiplicativo para cada valor de  $n$  y se almacena en un vector.

Para obtener el estado final, el cual se representaría con un vector de dimensiones  $29241 \times 1$  ( $171^2 \times 1$ ) bastaría con aplicar un producto tensorial entre todos los estados de los modos *signal* e *idler*, multiplicarlos por su factor multiplicativo correspondiente y sumarlos. Sin embargo, si se realiza esta operación a primeras los operadores de cuadratura no podrían actuar sobre el estado por tener diferentes dimensiones.

Lo que hace el programa es mantener los factores que multiplican cada sumando y los estados de cada modo por separado. Y se comprueba el uso correcto de estos componentes calculando el vector medio y la matriz de covarianza siguiendo las ecuaciones (2.57 y 2.58). Para esto se crearon siguientes funciones

**Mean\_vector**, la cual recibe como parámetros los estados de Fock de cada modo, el vector que almacena los factores multiplicativos y los operadores de cuadratura, y devuelven el vector medio.

**Covariance**, la cual recibe los mismos parámetros pero devuelve la matriz de covarianza  $V_{TMSV}$ .

### 3.6. Código de la hipótesis $H_0$

Como se ha explicado en el epígrafe del capítulo 2, bajo esta hipótesis el modo *signal*, que ha sido enviado a interrogar una zona del espacio, se pierde debido a que no hay ningún blanco que pueda reflejar esta señal. Al receptor solo llegan fotones térmicos debido al ruido de fondo, por lo que el estado en el receptor se modela como un producto de dos estados térmicos, uno representando los  $N_{Th0} = N_T$  fotones del modo térmico y el otro a los  $N_S$  fotones del modo *idler*.

Para generar estos estados se ha creado la siguiente función:



**Thermal\_state**, la cual recibe como parámetros el número de fotones promedio, los estados de Fock del modo y las dimensiones de las matrices, y devuelve una matriz de densidad que representa al estado, siguiendo la ecuación (2.48).

Se crean los dos estados térmicos y a partir de ellos se calculan el vector medio y la matriz de covarianza de esta hipótesis, siguiendo los cálculos mostrados en (2.61 a 2.66), y utilizando las siguientes funciones creadas:

**Mean\_H0**, la cual recibe como parámetros los dos estados térmicos y los operadores de cuadratura correspondientes y devuelve el vector medio.

**Covariance\_H0**, la cual recibe los mismos parámetros pero devuelve la matriz de covarianza  $V_0$ .

### 3.7. Código de la hipótesis $H_1$

Bajo esta hipótesis una pequeña porción de la señal transmitida, mezclada con el ruido térmico de fondo, es reflejada hacia el receptor. Se utiliza también la función **thermal\_state** para generar el estado térmico de  $N_{TH1} = \frac{N_T}{1-\kappa}$ .

Para comprobar que se ha modelado correctamente se calculan el vector medio y la matriz de covarianza, siguiendo las ecuaciones (2.69 a 2.74), utilizando las siguientes funciones:

**Mean\_H1**, la cual recibe como parámetros el estado térmico, el vector con los factores multiplicativos del estado TMSV, los estados de Fock de los modos *signal* e *idler* y los operadores de cuadratura correspondientes y devuelve el vector medio.

**Covariance\_H1**, la cual recibe los mismos parámetros pero devuelve la matriz de covarianza  $V_1$ .

### 3.8. Receptor OPA

En esta sección del código se define la ganancia del OPA y se procede a hacer el conteo de fotones del estado recibido, siguiendo la ecuación (2.84 y 2.85), a través de la siguiente función:

**Calculate\_Nk**, la cual recibe como parámetros los operadores *creation* y *annihilation*, los estados térmicos, la reflectividad  $\kappa$ , la ganancia  $G$ , un identificador de hipótesis  $H = 0$  o  $1$ , el vector con los factores multiplicativos del estado TMSV y los estados de Fock de los modos *signal* e *idler*. Esta devuelve el número promedio de fotones que se ha contado  $N_0$  o  $N_1$ , bajo las hipótesis  $H_0$  o  $H_1$ , respectivamente.

### 3.9. Probabilidades de error. Método de Montecarlo

En esta sección del código es donde se utiliza el método de Montecarlo para obtener la probabilidad de error del sistema cuántico en función de  $M$ .

En primer lugar se define un vector de valores de  $M$ , normalmente con valores entre  $10^5$  y  $10^7$ , con saltos de 1000 o 10000.

Para cada valor de  $M$  se definen las funciones de probabilidad que gobiernan la llegada de los fotones al receptor, que como se ha comentado antes pueden aproximarse con distribuciones Gaussianas. Estas funciones dependen del número de fotones  $N_0$  o  $N_1$  que se ha contado en los estados recibidos, bajo las hipótesis  $H_0$  o  $H_1$ , respectivamente, y tendrán la siguiente forma:

$$P_{N|H_0}(n|H_0) \sim N(MN_0, \sqrt{MN_0(N_0 + 1)}) \quad (3.4)$$

$$P_{N|H_1}(n|H_1) \sim N(MN_1, \sqrt{MN_1(N_1 + 1)}) \quad (3.5)$$

De igual manera, para cada valor de  $M$  se define el valor umbral correspondiente

$$N_{th} = \left\lceil \frac{M(\sigma_1 N_0 + \sigma_0 N_1)}{\sigma_1 + \sigma_0} \right\rceil \quad (3.6)$$

Ahora, ¿cómo se calcula la probabilidad de error? El proceso se separa en dos pasos:

1. **Asumiendo que no hay un blanco presente (hipótesis  $H_0$ ).** Primero se obtiene un valor aleatorio  $N$ , de acuerdo con la función de probabilidad  $P_{N|H_0}(n|H_0)$ . Este valor se considera el número medio de fotones contados en el receptor tras la transmisión de las  $M$  copias de la señal de sondeo hacia el posible blanco. Utilizando el detector de umbral se toma una decisión según el valor  $N$  obtenido. Si este es mayor o igual que el umbral ( $N \geq N_{th}$ ) se decide que hay un blanco presente, es decir, se decide que  $H_1$  es verdad, lo que sería un error de falsa alarma. En caso contrario ( $N < N_{th}$ ) se decide que no hay blanco presente, es decir, se decide que  $H_0$  es verdad, siendo la detección correcta.

Este mismo proceso se realiza múltiples veces para cada valor de  $M$  con el fin de obtener la probabilidad de falsa alarma  $P_{FA}$  dividiendo el número de errores de falsa alarma que han ocurrido entre el número total de intentos.

2. **Asumiendo que hay un blanco presente (hipótesis  $H_1$ ).** Primero se obtiene un valor aleatorio  $N$ , de acuerdo con la función de probabilidad

$P_{N|H_1}(n|H_1)$ . Este valor se considera el número medio de fotones contados en el receptor tras la transmisión de las  $M$  copias de la señal de sondeo hacia el posible blanco. Utilizando el detector de umbral se toma una decisión según el valor  $N$  obtenido. Si este es mayor o igual que el umbral ( $N \geq N_{th}$ ) se decide que hay un blanco presente, es decir, se decide que  $H_1$  es verdad, siendo la detección correcta. En caso contrario ( $N < N_{th}$ ) se decide que no hay blanco presente, es decir, se decide que  $H_0$  es verdad, lo que sería un error de pérdida.

Este mismo proceso se realiza múltiples veces para cada valor de  $M$  con el fin de obtener la probabilidad de pérdida  $P_M$  dividiendo el número de errores de pérdida que han ocurrido entre el número total de intentos.

Una vez obtenidas estas probabilidades se utiliza la siguiente fórmula

$$P_e = p(H_0)P_{FA} + p(H_1)P_M = 0.5(P_{FA} + P_M) \quad (3.7)$$

Y se obtiene la probabilidad de error total del sistema para un valor de  $M$ .

Por último, se grafican los puntos obtenidos sobre las curvas teóricas para establecer una comparación.

### 3.10. Comparación de las gráficas teóricas con las simuladas

En las gráficas resultantes del programa se muestra una comparación entre los límites superiores e inferiores de probabilidad de error, tanto del sistema clásico como el cuántico, con la curva teórica dada por el OPA y los puntos obtenidos a partir del método de Montecarlo, en función de  $M$ .

Debido a una limitación en la capacidad computacional, las ecuaciones teóricas se toman sin ninguna aproximación. Las ecuaciones utilizadas son las siguientes:

- Límites de probabilidad de error del caso clásico:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - e^{-2M\kappa N_s(\sqrt{N_T+1} - \sqrt{N_T})^2}} \right) \leq \Pr(e) \leq \frac{1}{2} e^{-M\kappa N_s(\sqrt{N_T+1} - \sqrt{N_T})^2} \quad (3.8)$$

- Límites de probabilidad de error del caso cuántico:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - e^{-2M\frac{\kappa\gamma_s}{N_T}}} \right) \leq \Pr(e) \leq \frac{1}{2} e^{-M\frac{\kappa\gamma_s}{N_T}} \quad (3.9)$$

Donde

$$\gamma_s = \frac{N_s(1+N_s)[1+N_s-\sqrt{N_s(1+N_s)}]}{1+N_s+\sqrt{N_s(1+N_s)}} \quad (3.10)$$

## 4. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones realizadas para cumplir con los objetivos de este trabajo. El contenido de este se enumera a continuación:

1. Observación de las curvas teóricas de los límites de probabilidad de error de los sistemas cuántico y clásico, y de la probabilidad de error utilizando el receptor OPA, en distintos escenarios, con el fin de comprobar el comportamiento descrito teóricamente.
2. Comparación de la curva teórica de probabilidad de error del receptor OPA ideal y la aproximación Gaussiana de este, con el fin de estudiar bajo qué condiciones esta última representa una buena aproximación del funcionamiento original del OPA.
3. Validación de los procesos implementados en el sistema de radar cuántico a partir de la comparación de las matrices de covarianza obtenidas con las teóricas.
4. Simulaciones, utilizando el método de Montecarlo, de la probabilidad de error para distintos valores de  $N_S$ .
5. Observación del comportamiento de las curvas teóricas de probabilidad de error ante una variación de la reflectividad del blanco  $\kappa$ .

#### 4.1. Comprobación del comportamiento de las curvas teóricas

En este epígrafe se realiza una comparación de los límites de probabilidad de error de los sistemas cuántico y clásico, y del receptor OPA con las gráficas y descripciones teóricas comentadas en el capítulo 2, con el fin de comprobar, para distintos valores de  $N_S$  (número promedio de fotones *signal* e *idler*), las tendencias descritas en la literatura seguida.

La primera simulación cuenta con los parámetros mostrados en la tabla 4.1.

TABLA 4.1. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 1 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS.

| $N_S$ | Frecuencia | Temperatura | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|------------|-------------|-------|----------|--------------------|
| 0.01  | 300 GHz    | 300 K       | 20    | 0.01     | $[10^5:10^4:10^7]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.1.

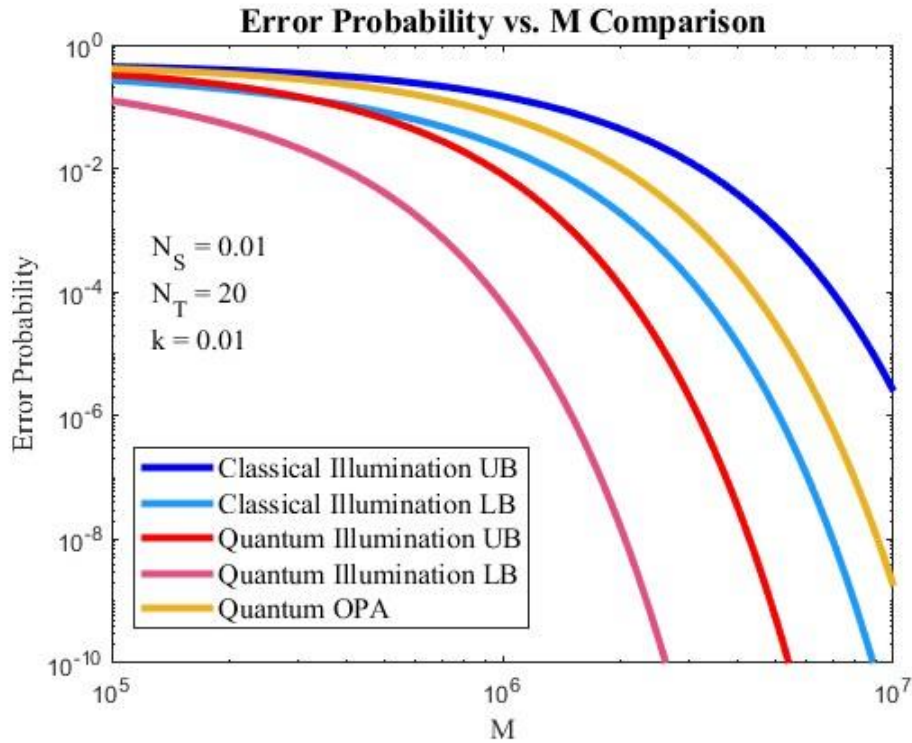


Fig 4.1. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.1.

Comparándola con la figura 2.14 mostrada en capítulo 2 se puede observar el mismo resultado. A partir de un cierto valor de  $M$  los límites del radar cuántico

(en rojo y rosa) se encuentran por debajo del límite inferior del clásico (azul claro), demostrando una ventaja para el primero bajo estas condiciones.

Si se compara con la figura 2.18 se observa también el mismo resultado. El receptor OPA (amarillo) brinda una ventaja sobre el sistema clásico, pero al ser un receptor subóptimo, no logra alcanzar la ventaja máxima ofrecida por QI.

En la segunda simulación se incrementó el valor de  $N_S$  un orden de magnitud, como se muestra en la tabla 4.2.

TABLA 4.2. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 2 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS.

| $N_S$ | Frecuencia | Temperatura | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|------------|-------------|-------|----------|--------------------|
| 0.1   | 300 GHz    | 300 K       | 20    | 0.01     | $[10^4:10^3:10^7]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.2.

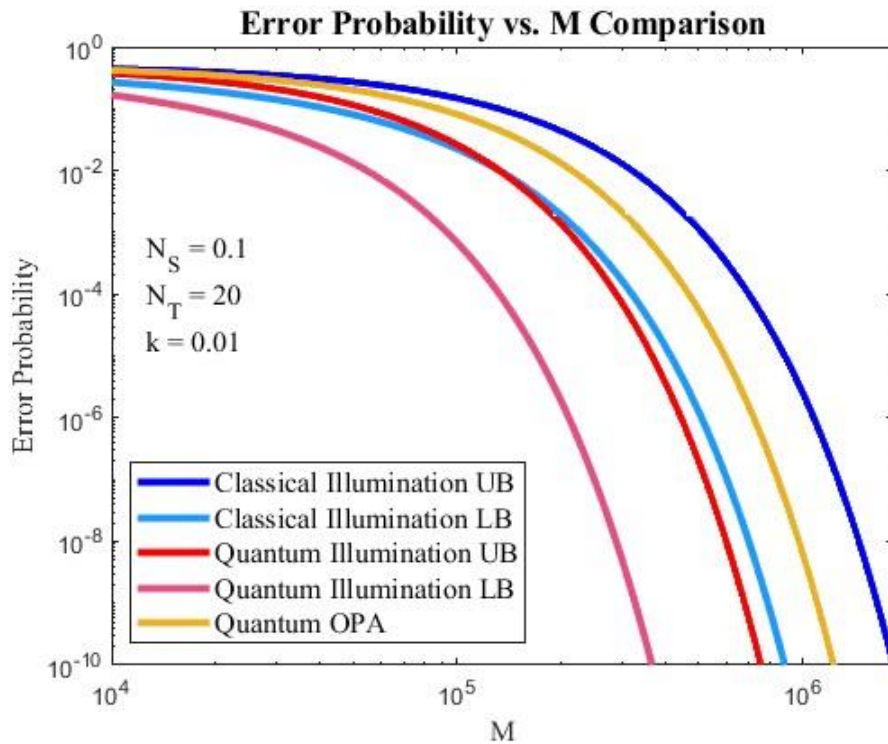


Fig 4.2. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.2.

El comportamiento de las curvas concuerda con lo que se ha expresado teóricamente en el capítulo 2. A medida que aumenta el número de fotones de señal, la información brindada por el entrelazamiento se vuelve cada vez más

irrelevante. Se aprecia como el límite superior del sistema cuántico (rojo) se ha acercado al inferior del clásico (azul claro), mostrando una disminución de la ventaja cuántica. Lo mismo le ha ocurrido a la curva del OPA (amarillo), se ha acercado al límite superior clásico (azul oscuro).

En la tercera simulación se incrementó el valor de  $N_S$  otro orden de magnitud, como se muestra en la tabla 4.3.

TABLA 4.3. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 3 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS.

| $N_S$ | Frecuencia | Temperatura | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|------------|-------------|-------|----------|--------------------|
| 1     | 300 GHz    | 300 K       | 20    | 0.01     | $[10^3:10^2:10^6]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.3.

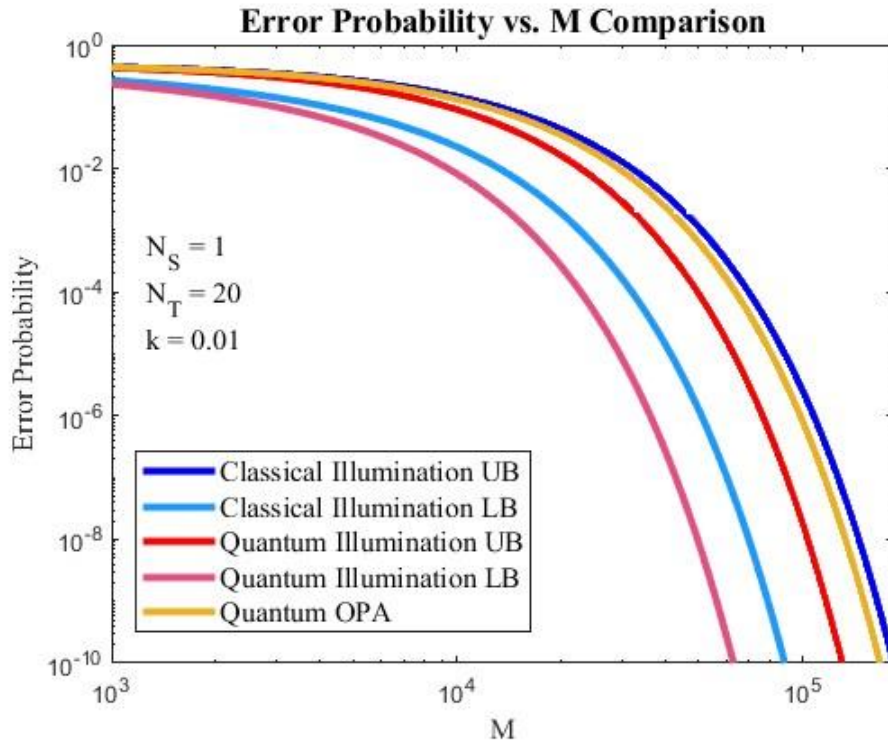


Fig 4.3. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.3.

La figura 4.3 puede compararse con la figura 2.15 en la que se muestra una gráfica para los mismos parámetros. En estas se observa el mismo comportamiento, la ventaja cuántica termina desapareciendo al aumentar el valor de  $N_S$ .



En la cuarta simulación se incrementó el valor de  $N_S$  otro orden de magnitud, como se muestra en la tabla 4.4.

TABLA 4.4. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 4 DE COMPARACIÓN DE CURVAS TEÓRICAS.

| $N_S$ | Frecuencia | Temperatura | $N_T$ | $\kappa$ | $M$              |
|-------|------------|-------------|-------|----------|------------------|
| 10    | 300 GHz    | 300 K       | 20    | 0.01     | $[10^2:10:10^4]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.4.

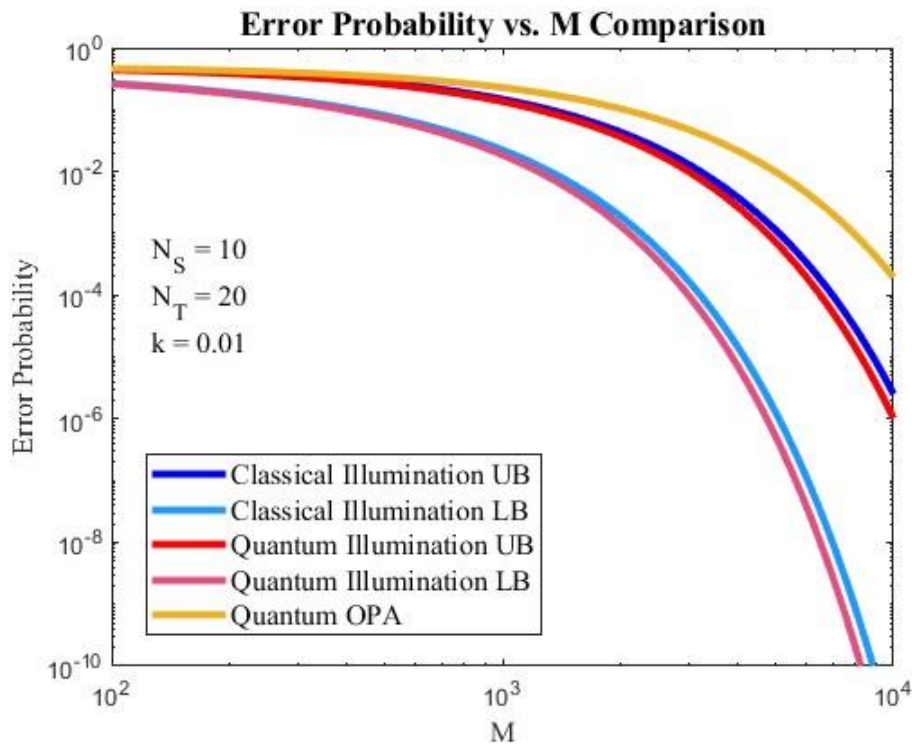


Fig 4.4. Comparación de los límites superiores e inferiores de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error del receptor OPA para los valores de la tabla 4.4.

En la figura 4.4 pueden apreciarse dos cosas. La primera es que cuando  $N_S \gg 1$  la ventaja del sistema cuántico desaparece por completo y este converge a las mismas curvas de probabilidad de error del sistema clásico. La pequeña información brindada por las correlaciones entre los modos *signal* e *idler* se ha vuelto completamente irrelevante.

La segunda es que el OPA muestra ahora peores prestaciones que el sistema clásico. Esto puede deberse a que para estos valores de  $N_S$  ya no se cumple que la ganancia del OPA sea una valor mayor pero muy cercano al 1. Como se ha

comentado en un ejemplo en el estado del arte, la mecánica cuántica asegura que la amplificación con ganancia  $G$  siempre viene acompañada de algún ruido de varianza  $G - 1$  que reduce el entrelazamiento entre las señales. Al aumentar tanto la ganancia, la cual es dependiente del valor de  $N_S$ , se ha introducido un ruido que ha perjudicado significativamente a las prestaciones del OPA.

Como conclusión, se ha visto que la ventaja del sistema cuántico sobre el clásico parece darse solamente en un régimen de señal de baja potencia.

## 4.2. Comprobación de la aproximación Gaussiana del receptor OPA

En este epígrafe se realiza una comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y la aproximación Gaussiana de la misma, con el fin de identificar bajo qué condiciones esta aproximación brinda resultados fieles a la curva original.

La primera simulación cuenta con los parámetros mostrados en la tabla 4.5.

TABLA 4.5. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 1 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.

| $N_S$ | <i>Frecuencia</i> | <i>Temperatura</i> | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|-------------------|--------------------|-------|----------|--------------------|
| 0.001 | 300 GHz           | 300 K              | 20    | 0.01     | $[10^5:10^4:10^9]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.5.

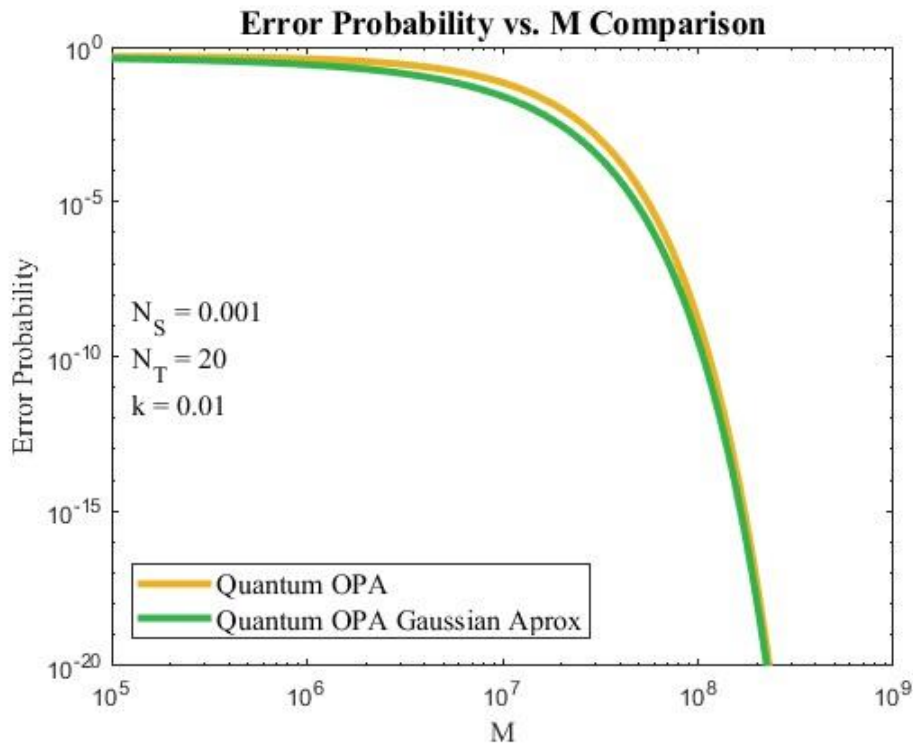


Fig 4.5. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.5.

En la figura 4.5 se puede observar que para los parámetros simulados, la probabilidad de error dada por distribuciones Gaussianas es una buena aproximación de la curva original.

En la segunda simulación se incrementó el valor de  $N_S$  un orden de magnitud, como se muestra en la tabla 4.6.

TABLA 4.6. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 2 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.

| $N_S$ | <i>Frecuencia</i> | <i>Temperatura</i> | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|-------------------|--------------------|-------|----------|--------------------|
| 0.01  | 300 GHz           | 300 K              | 20    | 0.01     | $[10^5:10^4:10^8]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.6.

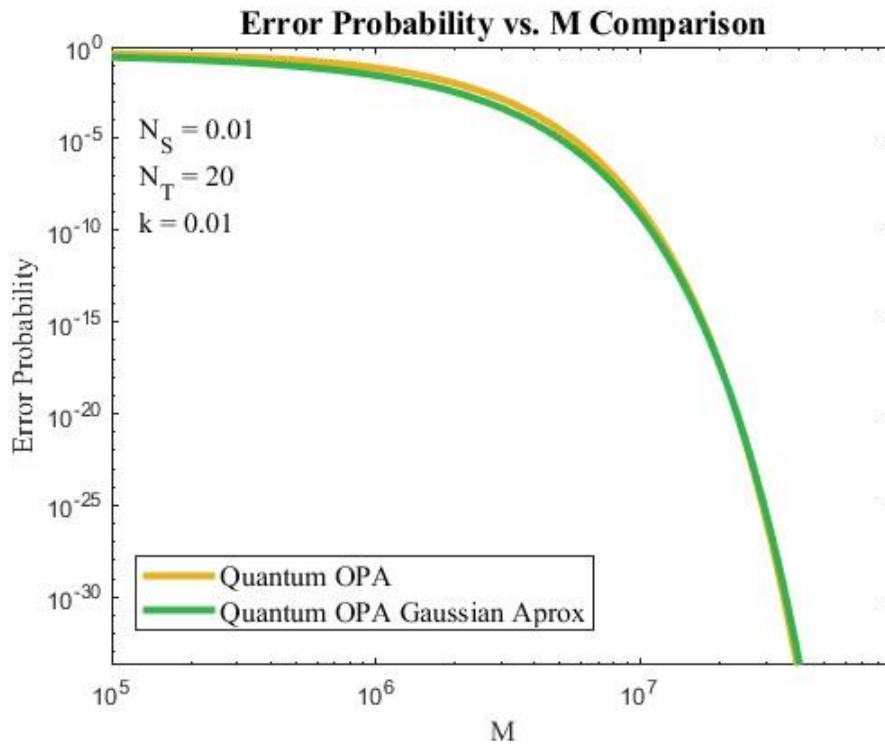


Fig 4.6. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.6.

En la figura 4.6 se puede apreciar que para este valor de  $N_S$  la aproximación sigue correctamente a la curva original, sobre todo para valores de  $M$  mucho mayores que 1.

En la tercera simulación se incrementó el valor de  $N_S$  otro orden de magnitud, como se muestra en la tabla 4.7.

TABLA 4.7. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 3 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.

| $N_S$ | <i>Frecuencia</i> | <i>Temperatura</i> | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|-------------------|--------------------|-------|----------|--------------------|
| 0.1   | 300 GHz           | 300 K              | 20    | 0.01     | $[10^3:10^2:10^7]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.7.

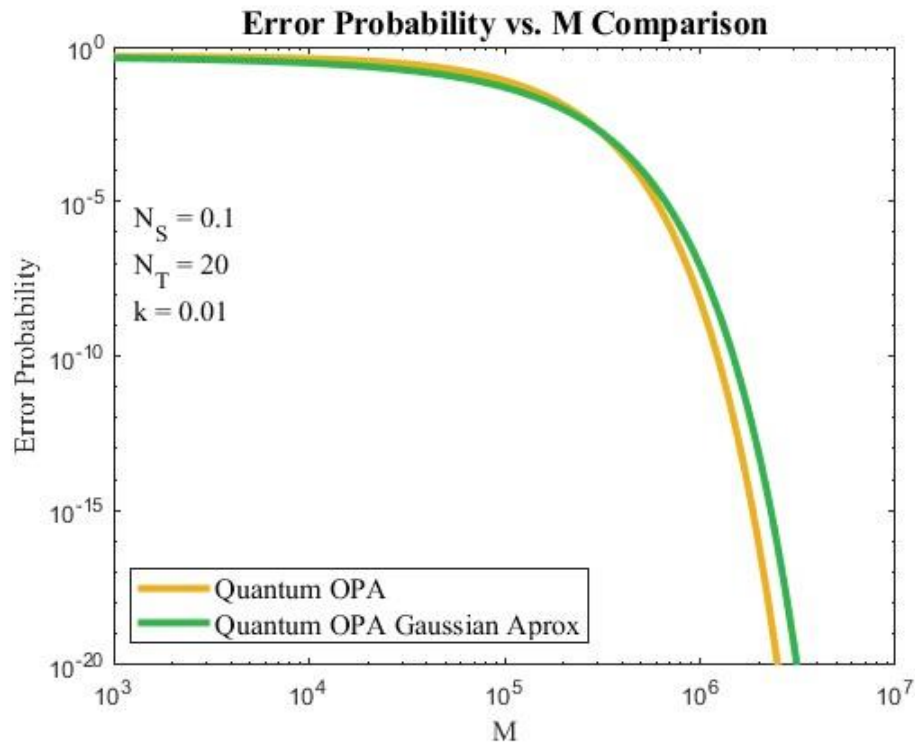


Fig 4.7. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.7.

En esta figura ya se empiezan a observar problemas en la aproximación. Las curvas comienzan a separarse debido a que las asunciones realizadas para hacer la aproximación no se están cumpliendo completamente. Se puede apreciar también como las prestaciones de la aproximación son peores que las de la curva teórica, como se esperaba.

Para los valores de  $M$  representados, existe una diferencia máxima entre las probabilidades de error del orden de  $10^3$ . Sin embargo, para valores de la probabilidad de error que se consideran aceptables (alrededor de  $10^{-10}$ ) la diferencia es de un solo orden de magnitud, por lo que la aproximación todavía se considera como apropiada.

En la última simulación se incrementó el valor de  $N_S$  otro orden de magnitud, como se muestra en la tabla 4.8.

TABLA 4.8. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 4 DE COMPROBACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAUSSIANA DEL OPA.

| $N_S$ | Frecuencia | Temperatura | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|------------|-------------|-------|----------|--------------------|
| 1     | 300 GHz    | 300 K       | 20    | 0.01     | $[10^3:10^2:10^7]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en la figura 4.8.

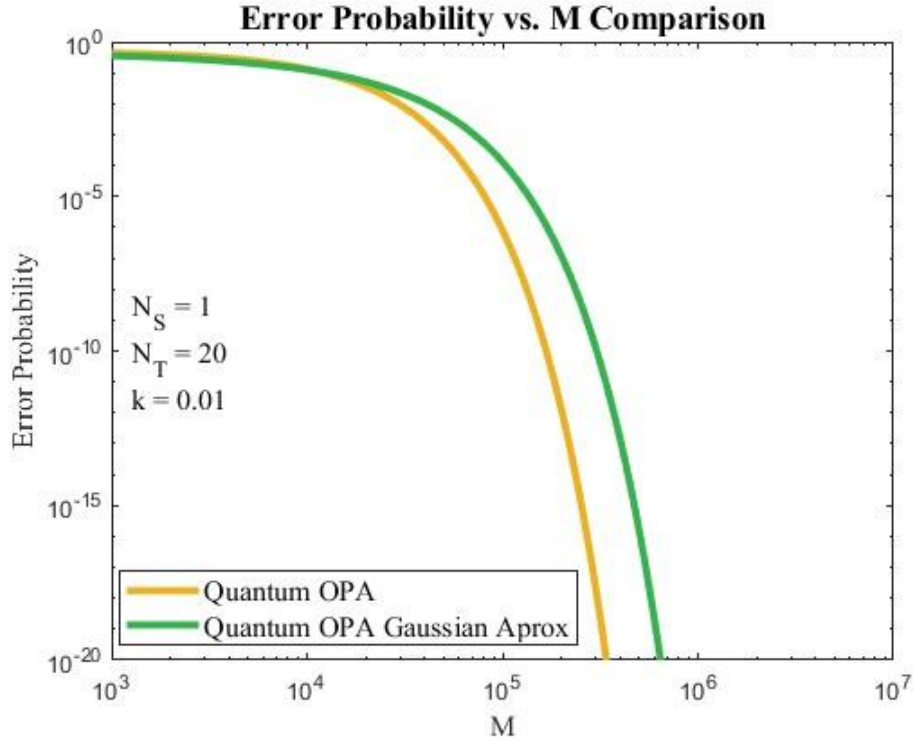


Fig 4.8. Comparación entre la probabilidad de error teórica del receptor OPA y su aproximación Gaussiana para los valores de la tabla 4.8.

En la figura 4.8 se puede apreciar como la aproximación deja de ser una fiel representación de lo que ocurre en el receptor original. Para los valores más altos de  $M$  existe una diferencia en las probabilidades de error del orden de  $10^8$  y para valores de probabilidad de error cercanos a  $10^{-10}$  la diferencia es de alrededor de cinco órdenes de magnitud, lo que no es una diferencia aceptable.

A la vista de estos resultados, se concluye que la aproximación Gaussiana del receptor basado en el OPA se considerará fiel a la curva original para un valor máximo de  $N_S = 0.1$  (asumiendo que los demás parámetros no cambian).

### 4.3. Validación de los procesos implementados en el sistema de radar cuántico a partir de la comparación de las matrices de covarianza obtenidas con las teóricas.

En este epígrafe se comprueba el correcto funcionamiento de la simulación programada a partir de comparar las matrices de covarianzas que se obtienen en cada proceso del sistema con las comentadas en la introducción teórica.

Para esta simulación se consideran los parámetros mostrados en la tabla 4.9.

TABLA 4.9. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN DE VALIDACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA.

| $N_s$ | Frecuencia | Temperatura | $N_T$ | $\kappa$ | mat_dim   |
|-------|------------|-------------|-------|----------|-----------|
| 0.01  | 595 GHz    | 300 K       | 10    | 0.01     | 150 x 150 |

Lo primero que se comprueba es la generación correcta del estado entrelazado TMSV. Para los parámetros mostrados en la tabla 4.9 la matriz sería la siguiente:

$$V_{TMSV} = \begin{pmatrix} 2N_s + 1 & 0 & 2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 \\ 0 & 2N_s + 1 & 0 & -2\sqrt{N_s(N_s + 1)} \\ 2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & 2N_s + 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & 2N_s + 1 \end{pmatrix} =$$

$$V_{TMSV} = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 0.20099 & 0 \\ 0 & 1.02 & 0 & -0.20099 \\ 0.20099 & 0 & 1.02 & 0 \\ 0 & -0.20099 & 0 & 1.02 \end{pmatrix}$$

La matriz devuelta por el programa se muestra en la figura 4.9.

|            |         |        |         |
|------------|---------|--------|---------|
| cov_TMSV = |         |        |         |
| 1.0200     | 0       | 0.2010 | 0       |
| 0          | 1.0200  | 0      | -0.2010 |
| 0.2010     | 0       | 1.0200 | 0       |
| 0          | -0.2010 | 0      | 1.0200  |

Fig 4.9. Matriz de covarianza del estado TMSV devuelta para los valores de la tabla 4.9.

Aunque en la ventana de comandos de salida de MATLAB aparecen algunos valores diferentes a los teóricos, no se calculará en este caso un porcentaje de error

ya que, tras inspeccionar los valores de las variables en el programa, se ha observado que coinciden con los de la matriz y que es la ventana de comandos la que produce un redondeo al mostrar los datos.

A la vista de estos resultados se puede concluir que el estado TMSV se genera de manera correcta y que existe una correlación entre los modos mostrada en los términos fuera de la diagonal de la matriz.

El siguiente paso es comprobar la correcta generación de los estados que llegan al receptor para cada una de las hipótesis.

Comenzando por la hipótesis  $H_0$ , blanco ausente. Para los parámetros mostrados en la tabla 4.9 la matriz sería la siguiente:

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2N_T + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2N_T + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2N_s + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N_s + 1 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.02 \end{pmatrix}$$

La matriz devuelta por el programa se muestra en la figura 4.10.

|          |         |        |        |  |
|----------|---------|--------|--------|--|
| cov_H0 = |         |        |        |  |
| 20.9998  | 0       | 0      | 0      |  |
| 0        | 20.9998 | 0      | 0      |  |
| 0        | 0       | 1.0200 | 0      |  |
| 0        | 0       | 0      | 1.0200 |  |

Fig 4.10. Matriz de covarianza del estado cuántico de la hipótesis  $H_0$  devuelta por el programa desarrollado.

Viendo esta matriz se puede concluir que el sistema brinda una buena aproximación de la matriz de covarianza de la hipótesis  $H_0$ , ya que el error relativo de los primeros dos elementos de la diagonal de la matriz es:

$$Error_{Rel} = \frac{21 - 20.9998}{21} \times 100 = 9.52 \times 10^{-4}\%$$

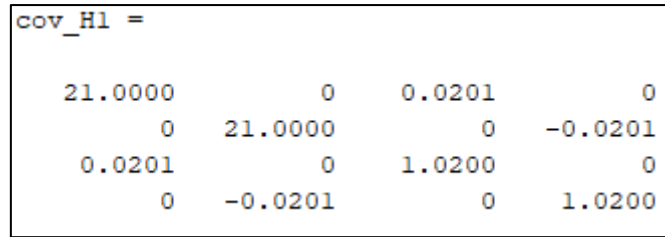
En el caso de la hipótesis  $H_1$ , blanco presente. Para los parámetros mostrados en la tabla 4.9 la matriz sería la siguiente:



$$V_1 = \begin{pmatrix} 2\kappa N_S + 2N_T + 1 & 0 & 2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} & 0 \\ 0 & 2\kappa N_S + 2N_T + 1 & 0 & -2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} \\ 2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} & 0 & 2N_S + 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\kappa}\sqrt{N_S(N_S + 1)} & 0 & 2N_S + 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 21.0002 & 0 & 0.020099 & 0 \\ 0 & 21.0002 & 0 & -0.020099 \\ 0.020099 & 0 & 1.02 & 0 \\ 0 & -0.020099 & 0 & 1.02 \end{pmatrix}$$

La matriz devuelta por el programa se muestra en la figura 4.11.



```

cov_H1 =

    21.0000         0    0.0201         0
         0    21.0000         0   -0.0201
    0.0201         0    1.0200         0
         0   -0.0201         0    1.0200

```

Fig 4.11. Matriz de covarianza del estado cuántico de la hipótesis  $H_1$  devuelta por el programa desarrollado.

Igual que en el caso del estado TMSV los elementos fuera de la diagonal de la matriz no se consideran como erróneos, ya que es MATLAB el que está haciendo un redondeo de los valores. Sin embargo, los dos primeros elementos de la diagonal principal si difieren de los valores teóricos. El error relativo es el siguiente:

$$Error_{Rel} = \frac{21.0002 - 21}{21.0002} \times 100 = 9.52 \times 10^{-4}\%$$

A la vista de esto se considera que las matrices son una aproximación razonable de las teóricas.

El siguiente paso es contar el número de fotones que se recibe en cada una de las hipótesis utilizando la ecuación  $N_k = \langle \hat{c}^{\dagger(k)} \hat{c}^{(k)} \rangle$ . Es importante considerar que la ganancia del OPA se calcula como  $G = 1 + \epsilon^2$ , donde  $\epsilon^2 = \frac{N_S}{\sqrt{N_T}}$ .

Los valores teóricos serían los siguientes:

$$G = 1 + \frac{N_S}{\sqrt{N_T}} = 1 + \frac{0.01}{\sqrt{10}} = 1.00316$$

$$N_0 = GN_S + (G - 1)(1 + N_T) = 0.0447916$$

$$N_1 = GN_S + (G - 1)(1 + N_T + \kappa N_S) + 2\sqrt{G(G - 1)}\sqrt{\kappa N_S(N_S + 1)} = 0.0459235$$

Los valores devueltos por el programa son:

$$N_0 = 0.0448163$$

$$N_1 = 0.0459487$$

Los errores correspondientes son:

$$Error_{Rel\ 0} = \frac{0.0448163 - 0.0447916}{0.0447916} \times 100 = 0.055\%$$

$$Error_{Rel\ 1} = \frac{0.0459487 - 0.0459235}{0.0459235} \times 100 = 0.054\%$$

A la vista de estos resultados se concluye que los procesos de generación de estados TMSV, interacción con el blanco y el entorno según las posibles hipótesis, y el conteo de fotones en el extremo receptor se simulan correctamente y con errores aceptables.

#### 4.4. Comparación de las curvas teóricas de la probabilidad de error con las obtenidas a partir del método de Montecarlo para distintos valores de $N_S$ .

En este epígrafe se comparan las curvas de probabilidad de error teóricas con las obtenidas a través del método de Montecarlo, para distintos valores de  $N_S$ . Estas simulaciones se realizan solo para los valores para los cuales la aproximación Gaussiana del OPA se ha considerado como aceptable, es decir, valores de  $N_S$  entre 0.001 y 0.1.

La primera simulación cuenta con los parámetros mostrados en la tabla 4.10.

TABLA 4.10. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 1 UTILIZANDO EL MÉTODO DE MONTECARLO

| $N_S$ | Frecuencia | Temperatura | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|------------|-------------|-------|----------|--------------------|
| 0.001 | 300 GHz    | 300 K       | 20    | 0.01     | $[10^5:10^4:10^8]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en las figura 4.12.

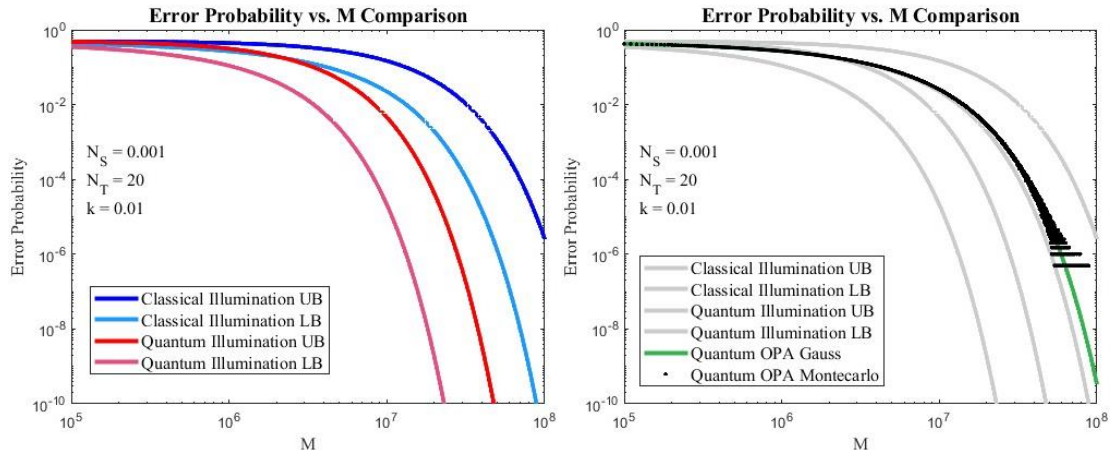


Fig 4.12. Izquierda, límites superiores e inferiores de la probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico. Derecha, comparación de la probabilidad de error obtenida con el método de Montecarlo (negro) y la de la aproximación Gaussiana del receptor OPA. Según los valores de la tabla 4.10.

Lo primero que se puede apreciar es que los puntos obtenidos con el método de Montecarlo (negro) siguen correctamente a la curva teórica del OPA (verde), comprobando el correcto funcionamiento del código implementado.

Pese a que pareciera que hay múltiples valores de probabilidad de error para cada valor de  $M$ , esto no es así. Para cada valor de  $M$  (según los saltos establecidos en el vector) hay un único punto en la gráfica. Esto puede apreciarse en la figura 4.13, la cual es un zoom de la figura 4.12.

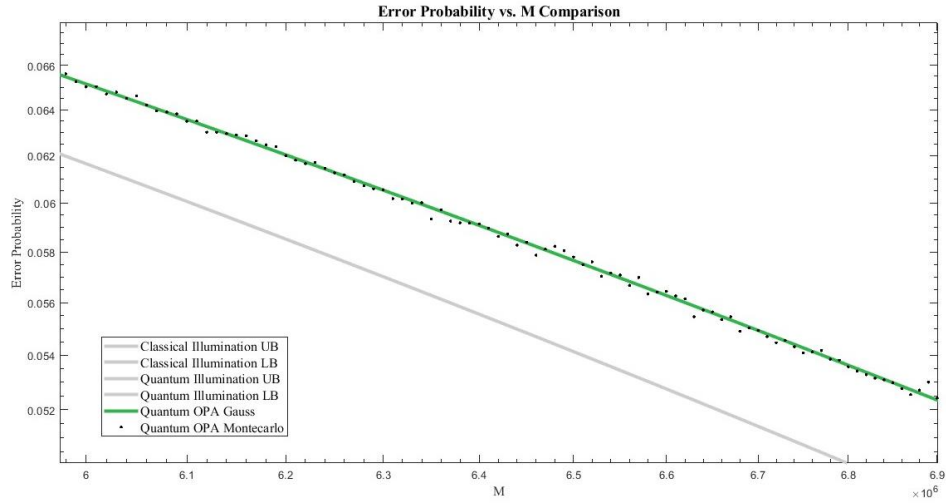


Fig 4.13. Probabilidades de error obtenidas a través del método de Montecarlo con comparación con la aproximación Gaussiana del receptor OPA.

Otro aspecto importante es el hecho de que los puntos negros se acaban alrededor de  $Pe = 10^{-6}$ , esto se debe a que para cada valor de  $M$  se simuló cada hipótesis de detección  $10^6$  veces. Aplicando la fórmula (2.95) y suponiendo que ha ocurrido un solo error, se obtiene la probabilidad de error mínima ( $Pe = 0.5 \times 10^{-6}$ ). Estos puntos podrían continuar adquiriendo valores más bajos si se aumenta la cantidad de simulaciones realizadas, sin embargo, este resulta un procedimiento computacionalmente costoso. En la figura 4.14 pueden apreciarse las dos probabilidades de error más bajas que puede alcanzarse con los parámetros establecidos. Estas se corresponden con el hecho de cometer dos ( $Pe = 1 \times 10^{-6}$ ) o un error ( $Pe = 5 \times 10^{-7}$ ) en el proceso de detección.

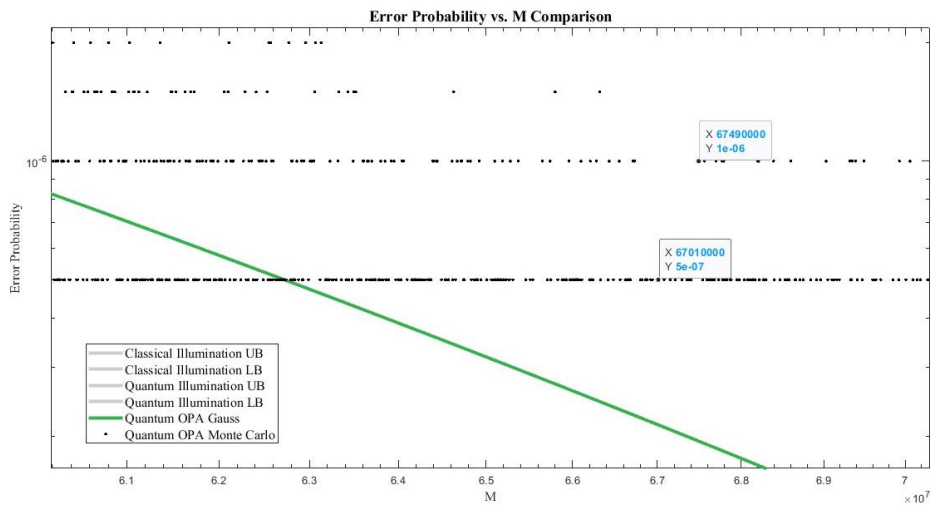


Fig 4.14. Probabilidades de error más bajas que puede alcanzarse con el método de Montecarlo para los parámetros establecidos en la tabla 4.10.

En la segunda simulación se aumenta el valor de  $N_S$  un orden de magnitud como se muestra en la tabla 4.11.

TABLA 4.11. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 2 UTILIZANDO EL MÉTODO DE MONTECARLO.

| $N_S$ | <i>Frecuencia</i> | <i>Temperatura</i> | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|-------------------|--------------------|-------|----------|--------------------|
| 0.01  | 300 GHz           | 300 K              | 20    | 0.01     | $[10^5:10^4:10^7]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en las figura 4.15.

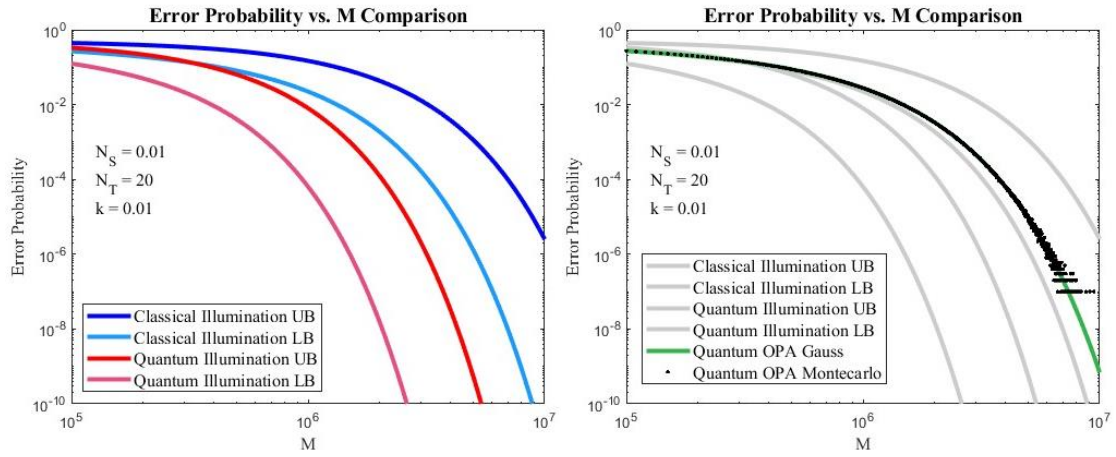


Fig 4.15. Izquierda, límites superiores e inferiores de la probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico. Derecha, comparación de la probabilidad de error obtenida con el método de Montecarlo (negro) y la de la aproximación Gaussiana del receptor OPA. Según los valores de la tabla 4.11.

De nuevo, los puntos obtenidos a través de simulaciones siguen correctamente a la curva teórica del OPA. Comparando la figura 4.15 con la figura 4.12 se puede apreciar como el aumento en el valor de  $N_S$  ha causado una disminución en la ventaja del sistema cuántico, haciendo que se aproxime la curva del OPA al límite superior del sistema clásico.

En la última simulación se aumenta el valor de  $N_S$  otro orden de magnitud como se muestra en la tabla 4.12.

TABLA 4.12. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN 3 UTILIZANDO EL MÉTODO DE MONTECARLO

| $N_S$ | <i>Frecuencia</i> | <i>Temperatura</i> | $N_T$ | $\kappa$ | $M$                |
|-------|-------------------|--------------------|-------|----------|--------------------|
| 0.1   | 300 GHz           | 300 K              | 20    | 0.01     | $[10^4:10^3:10^7]$ |

Y el resultado de la simulación se muestra en las figura 4.16.

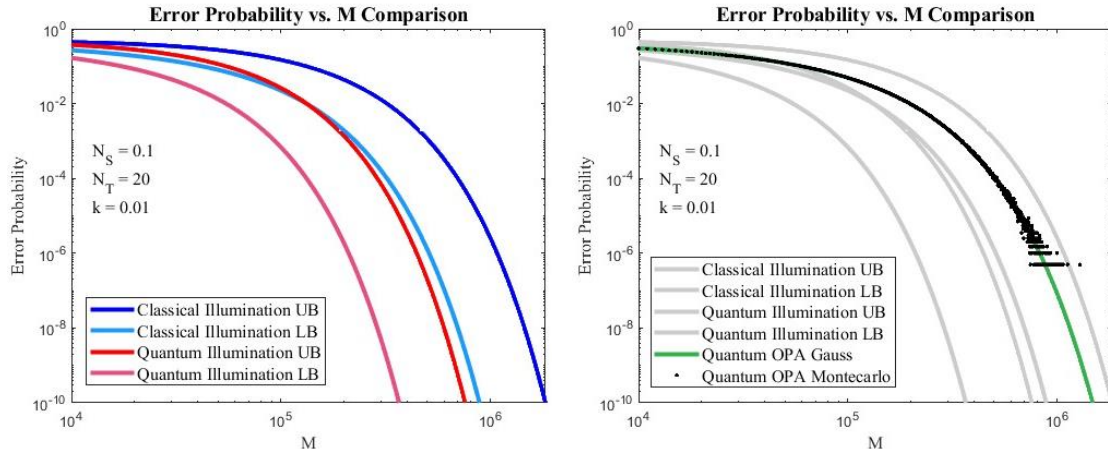


Fig 4.16. Izquierda, límites superiores e inferiores de la probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico. Derecha, comparación de la probabilidad de error obtenida con el método de Montecarlo (negro) y la de la aproximación Gaussiana del receptor OPA. Según los valores de la tabla 4.12.

Comparando esta última gráfica con las anteriores se puede observar como decaen las prestaciones del sistema con el aumento de los fotones de señal. Las simulaciones siguen correctamente a la gráfica teórica, comprobando su correcto funcionamiento.

Como conclusión, se ha observado como a través del método de Montecarlo ha sido posible simular el proceso de detección de objetivos basado en entrelazamiento cuántico. Se comprobó para distintos parámetros que este método permite obtener resultados que concuerdan con lo esperado teóricamente.

#### 4.5. Observación del comportamiento de las curvas teóricas de probabilidad de error ante una variación de la reflectividad del blanco $\kappa$ .

En este epígrafe se quiere observar el comportamiento del sistema de detección al variar la reflectividad del objetivo, con el fin de observar qué prestaciones dan los sistemas cuando el blanco es muy poco reflectante. Para esto se obtiene una gráfica de probabilidad de error en función de la relación señal a ruido, donde la variación de la SNR viene dada por una variación del valor de  $\kappa$ .

Los parámetros utilizados en la simulación se muestran en la tabla 4.13.

TABLA 4.13. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN DE OBSERVACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR AL VARIAR LA REFLECTIVIDAD.

| $N_S$ | <i>Frecuencia</i> | <i>Temperatura</i> | $N_T$ | $\kappa$                 | $M$             |
|-------|-------------------|--------------------|-------|--------------------------|-----------------|
| 0.01  | 1.14 THz          | 300 K              | 5     | [10 <sup>-8</sup> :0.01] | 10 <sup>7</sup> |

Y el resultado de la simulación se muestra en las figura 4.17.

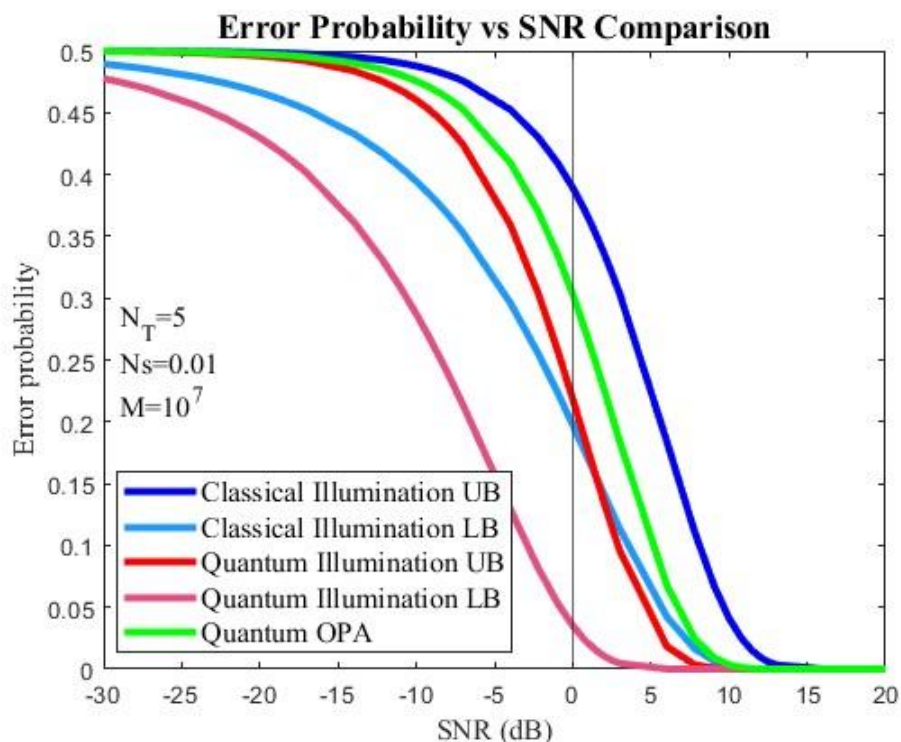


Fig 4.17. Comparación de los límites de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico con la probabilidad de error teórica del OPA, en función de la SNR y según los parámetros de la tabla 4.13.

Comparando los límites superiores entre sí se puede observar que el sistema cuántico brinda una ventaja en la detección sobre el clásico para valores bajos de

la SNR. Esto quiere decir que los blanco “parecen ser más grandes” o más visibles cuando se iluminan con una señal que está entrelazada. Se puede observar también como la curva del receptor OPA se encuentra prácticamente en medio de los límites superiores de probabilidad de error, corroborando su capacidad subóptima de detección en comparación con el sistema de recepción óptimo.

Igual que se vio en el capítulo 2, a medida que la SNR aumenta todas las curvas convergen a una probabilidad de error muy cercana a 0. Y cuando la SNR disminuye, las prestaciones de todos los sistemas empeoran hasta que la decisión es aleatoria.



## 5. CONCLUSIONES

En este capítulo se muestran los comentarios finales sobre el desarrollo de este trabajo. Se exponen los objetivos cumplidos, las posibles mejoras y el trabajo futuro.

### 5.1. Objetivos cumplidos

Como se ha comentado el objetivo principal de este trabajo era hacer un estudio teórico de un sistema de detección, a frecuencias ópticas, basado en tecnologías cuánticas, en particular en el protocolo llamado *quantum illumination* fundamentado en la propiedad cuántica del entrelazamiento, y realizar simulaciones bajo distintos escenarios con el fin de evaluar las prestaciones del sistema.

Para lograr este objetivo se fueron alcanzando una serie de objetivos parciales.

Se estudió en profundidad la teoría y el estado del arte actual del tema, brindando un resumen de los conceptos necesarios para entender el desarrollo e implementación de este trabajo.

Se planteó un diseño del sistema de detección completo (transmisor, interacción con el medio y el blanco, y receptor) utilizando procesos y dispositivos que son implementables actualmente a frecuencias de ópticas.

Se validó la correcta implementación del código en MATLAB comprobando las matrices de covarianzas de todos los estados cuánticos intervinientes en el proceso y comparando las curvas de probabilidad de error obtenidas como resultado con las ofrecidas en la bibliografía seguida.

Se realizaron simulaciones que corroboraron las descripciones y comportamientos teóricos estudiados, las cuales mostraron la ventaja del sistema cuántico sobre el clásico bajo condiciones específicas.

A lo largo de este trabajo se ha explicado como el uso de la propiedad cuántica del entrelazamiento permite mejorar el desempeño de un sistema de detección de objetivos a frecuencias ópticas en presencia de altas pérdidas y fuerte ruido

térmico. En particular, se ha observado que en el régimen de señal de baja potencia ( $N_S \ll 1$ ) el uso de *quantum illumination* permite una reducción de la probabilidad de error, con respecto al sistema clásico. De la misma forma, se ha visto como esta ventaja se vuelve cada vez menos relevante a medida que aumenta el número de fotones  $N_S$  utilizados para interrogar la región objetivo.

Esto se debe a que la ventaja en el caso cuántico se origina de la información extra brindada por la condición de entrelazamiento. Se ha visto como esta información puede mapearse a una cantidad extra de fotones en un proceso de conteo, como ocurre al usar un receptor OPA. Si las señales que se quieren distinguir tienen una gran cantidad de fotones, unos pocos extra no serán de mucha ayuda, sin embargo, cuando la cantidad es pequeña (en comparación con los extra) una cantidad de información extra, por pequeña que sea, puede dar una ventaja a la hora de distinguir entre las hipótesis.

La poca información brindada por el entrelazamiento se vuelve menos relevante a medida que aumenta la cantidad de fotones (la cantidad de información) que se tiene sobre la presencia o ausencia del blanco.

Como consecuencia de esto existe una limitación en el alcance que podría tener el sistema de detección, ya que actualmente no se tienen medios para aumentar la SNR (como por ejemplo aumentando el *phase-matching bandwidth*) sin destruir la ventaja del sistema cuántico.

Sin embargo, *quantum illumination* es el primer ejemplo de un protocolo de detección basado en entrelazamiento que brinda una ventaja sobre un sistema clásico, aun cuando el entrelazamiento inicial se destruye debido a las condiciones ambientales adversas que se presentan normalmente a frecuencias de microondas, como las altas pérdidas y el fuerte ruido térmico. Por esta razón, creo que no debería desestimarse el potencial de esta tecnología.

Incluso con las limitaciones actuales que se han comentado existen aplicaciones que requieren que la detección de un objetivo se realice con la menor energía posible, como por ejemplo, la detección sigilosa en el ámbito militar o el diagnóstico médico por imagen (*medical imaging*), donde es ideal utilizar los menores niveles de radiación posibles.

Para terminar se quiere resaltar que se ha alcanzado también el objetivo secundario propuesto. En este trabajo se muestran los desarrollos matemáticos

con mayor nivel de detalle que el que se ha visto en toda la literatura comentada anteriormente. Esto se considera importante ya que brinda a estudiantes y otros lectores una descripción matemática que puede resultar útil a la hora de entender mejor los conceptos expuestos.

### **5.2. Mejoras**

Una de las posibles mejoras sería incluir una interfaz gráfica en el programa para permitir su uso de manera más sencilla para cualquier usuario.

Se podría también cambiar algunos parámetros de entrada a magnitudes más conocidas como la temperatura en vez de  $N_T$ , incluyendo funciones que devuelvan el número promedio de fotones térmicos a partir de esta.

### **5.3. Trabajos futuros**

Como futuro trabajo sería interesante implementar un sistema basado directamente en frecuencias de microondas, con el fin de estudiar sus prestaciones.

Para esto sería necesario estudiar procesos y dispositivos que sean implementables actualmente, que permitan generar fotones entrelazados y realizar medidas cuánticas conjuntas en el régimen de microondas. Además, sería necesario un mayor poder computacional para poder utilizar matrices que sean buenas aproximaciones de los estados cuánticos para valores de ruido térmico más altos.



## 6. METODOLOGÍA Y PRESUPUESTO

En este capítulo se detallan los paquetes de trabajo que se siguieron para realizar este trabajo, así como el presupuesto, contabilizando tanto los costes de personal, como de materiales.

### 6.1. Metodología

A continuación, se muestran los paquetes de trabajo que se siguieron en el proceso de realización de este trabajo:

#### 6.1.1. Paquete de trabajo 0 (WP0): Gestión

Este paquete de trabajo se dedicó a actividades de seguimiento y gestión como:

- Coordinación con el tutor del TFM en reuniones semanales o cada dos semanas para hacer un seguimiento de los avances del trabajo.
- Evaluación periódica del progreso.

#### 6.1.2. Paquete de trabajo 1 (WP1): Estudio de la bibliografía

Este primer paquete de trabajo se dedicó al estudio de la bibliografía y estado del arte actual del tema de este trabajo.

El primer libro estudiado se titula “*Quantum Radar*” [3] y fue escrito por Marco Lanzagorta. En este se dan las bases para entender el funcionamiento de un radar cuántico y se presenta también una comparación con un sistema clásico.

El siguiente documento estudiado fue la tesis doctoral de Si Hui Tan titulada “*Quantum State Discrimination with Bosonic Channels and Gaussian States*” [10] en la que se explica el protocolo de *quantum illumination* utilizando estados Gaussianos comprimidos (*squeezed states*).

Como apoyo a estas lecturas se utilizaron el libros “*Quantum Mechanics: the theoretical minimum*” [17] escrito por Leonard Susskind y Art Friedman, “*Quantum Communications*” [1] de Gianfranco Cariolaro y “*The Quantum*

*Theory of Light*” [20] de Rodney Loudon, en los que se describen conceptos como el álgebra utilizada en la mecánica cuántica, el entrelazamiento y la cuantización del campo electromagnético, los cuales son fundamentales para entender los dos primeros libros mencionados.

Se estudiaron también cinco artículos científicos en particular:

- “*Detecting a target with quantum entanglement*” [14], de Giacomo Sorelli.
- “*Opportunities and Challenges of Quantum Radar*” [24], de Marco Lanzagorta.
- “*Gaussian-state quantum-illumination receivers for target detection*” [25], de Saikat Guha y Baris Erkmen.
- “*Gaussian Quantum Information*” [22], de Christian Weedbrook.
- “*Quantum Illumination with Gaussian States*” [26], de Si Hui Tan.

En estos se explicaba con más detalle el sistema completo para la detección de objetivos, los receptores, el modelado del blanco como un *beamsplitter*, los límites de la probabilidad de error, el uso de las matrices de covarianza y las oportunidades y retos del radar cuántico.

El resultado obtenido de este bloque fue el conocimiento básico necesario para el diseño, desarrollo matemático e implementación del sistema en MATLAB

### **6.1.3. Paquete de trabajo 2 (WP2): Diseño del sistema**

En este paquete de trabajo se planteó el diseño del sistema de detección cuántico. Se eligió un esquema del transmisor basado en SPDC, incluyendo los estados que se generarían (*two-mode squeezed vacuum states*), la interacción de los estados con el medio y el blanco en dos hipótesis, el receptor a utilizar (OPA) y el proceso de decisión a través de una aproximación Gaussiana.

El resultado de este bloque es un diagrama de bloques en el que se detallan todas las partes del sistema así como una descripción de los estados que entrarán y saldrán de cada bloque.

### **6.1.4. Paquete de trabajo 3 (WP3): Desarrollo matemático**

Este paquete de trabajo se dedicó a realizar el desarrollo matemático necesario para poder implementar luego el sistema en MATLAB. En este se definieron los estados de cada una de las hipótesis y la forma en que estos interactuarían con la

ausencia o presencia del blanco, modelado por la matriz de transformación de un *beamsplitter*. Se calcularon manualmente las matrices de covarianza para comprobar que los estados definidos eran correctos.

El resultado de este paquete de trabajo es un desarrollo matemático completo del sistema el cual es esencial para poder implementar el sistema en forma de código.

#### 6.1.5. Paquete de trabajo 4 (WP4): Implementación en MATLAB

Este paquete de trabajo se dedicó al desarrollo de un código de MATLAB que simulase el sistema de detección.

El resultado de este es un código ejecutable, compuesto de varias funciones, que permite obtener las curvas de probabilidad de error de los sistemas clásico y cuántico para distintos parámetros introducidos.

#### 6.1.6. Paquete de trabajo 5 (WP5): Evaluación y conclusiones

En este bloque se evaluaron los conocimientos adquiridos y los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo de este trabajo.

El resultado consistió en pequeñas presentaciones e informes entregados al tutor con el fin de validar cada paquete de trabajo y un informe final constituido por este Trabajo de Fin de Máster.

### 6.2. Cronograma de ejecución de los paquetes de trabajo

A continuación, se muestra en la figura 6.1 el cronograma seguido para la realización de este trabajo y en la figura 6.2 la leyenda correspondiente.

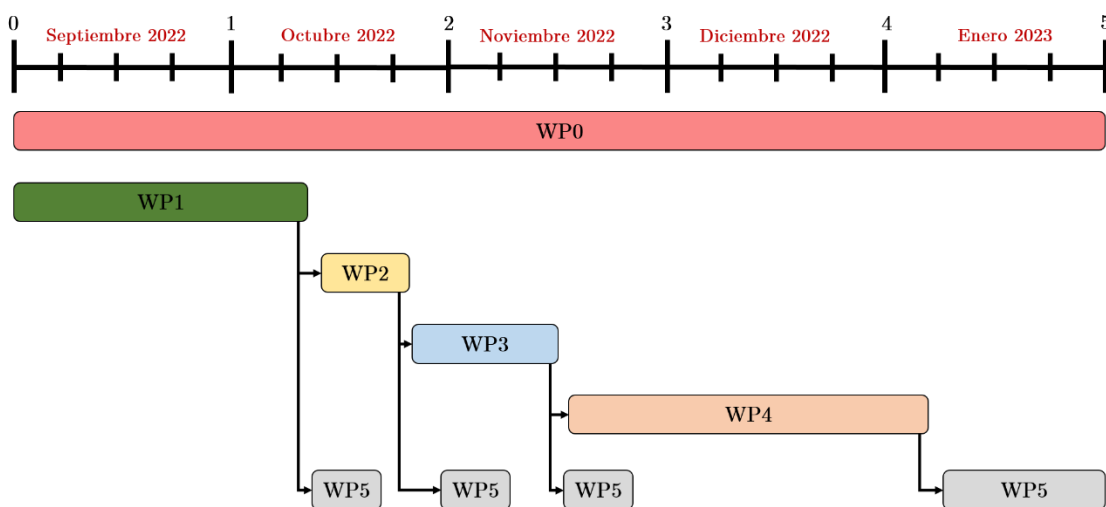


Fig 6.1. Cronograma de paquetes de trabajo.

| Leyenda |                            |
|---------|----------------------------|
| WP0     | Gestión                    |
| WP1     | Estudio de la bibliografía |
| WP2     | Diseño del sistema         |
| WP3     | Desarrollo matemático      |
| WP4     | Implementación en MATLAB   |
| WP5     | Evaluación y conclusiones  |

Fig 6.2. Leyenda del cronograma de paquetes de trabajo.

### 6.3. Presupuesto

En este epígrafe se recogen todos los costes de realización de este trabajo separadas en dos partes, coste del personal y coste de los materiales.

#### 6.3.1. Coste del personal

Para la realización de este trabajo han sido necesarias dos personas:

- Isabel Carnoto Amat, autora.
- PhD. Luis Enrique García Muñoz, tutor.

El sueldo recibido por la autora bajo un contrato de *17 h/semana* , por parte de la Universidad Carlos III de Madrid, a través de la Cátedra UC3M - ISDEFE Espacio es el siguiente:

- Desde septiembre 2022 a enero 2023: *713.95 €/mes*

El coste del asesoramiento por parte del tutor durante el tiempo que tomó realizar este trabajo es el siguiente:

- Desde septiembre 2022 a enero 2023: *50 horas por 60 €/hora*

El coste total del personal se muestra en la tabla 6.1.



TABLA 6.1. COSTE DEL PERSONAL.

| Persona                               | Coste     |
|---------------------------------------|-----------|
| Autora: Isabel Carnoto Amat           | 3569.75 € |
| Tutor: PhD. Luis Enrique García Muñoz | 3000 €    |
| <b>Total</b>                          | 6569.75 € |

### 6.3.2. Coste de los materiales

Este trabajo fue desarrollado utilizando un ordenador portátil HP Elite x2 con un procesador Intel Core m5-6Y57 a 1.10-1.51 GHz, de 8 GB de memoria RAM y un ordenador portátil HP ProBook 455 G3 con un procesador AMD A10-8700 Radeon R6 a 1.8 GHz, de 16 GB de memoria RAM.

Para calcular el coste del uso del material se ha utilizado el coeficiente de amortización de equipos electrónicos encontrado en la Agencia Tributaria [28].

Sabiendo que el primer portátil se utilizó los primeros 3 meses y el segundo los últimos dos, el coste se obtiene como:

$$Coste = Precio \times Coeficiente \times \frac{Meses\ de\ uso}{12} = 1679.00 \times 0.2 \times \frac{3}{12} = 83.95 \text{ €}$$

$$Coste = Precio \times Coeficiente \times \frac{Meses\ de\ uso}{12} = 761.09 \times 0.2 \times \frac{2}{12} = 25.37 \text{ €}$$

$$Coste_{total} = 83.95 \text{ €} + 25.37 \text{ €} = 109.32 \text{ €}$$

### 6.3.3. Presupuesto total

En la tabla 6.2 se muestra el coste total del desarrollo del proyecto.

TABLA 6.2. COSTE DE LOS MATERIALES.

| Tipo de coste | Coste     |
|---------------|-----------|
| Personal      | 6569.75 € |
| Materiales    | 109.32 €  |
| <b>Total</b>  | 6679.07 € |



## REFERENCIAS

- [1] G. Cariolaro, Quantum Communications. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.
- [2] H.K. Lo, H. Chau y M. Ardehali. “Efficient Quantum Key Distribution Scheme and a Proof of Its Unconditional Security”. J Cryptology, vol. 18, pp. 133–165, 2005. [En línea]. Disponible: <https://doi.org/10.1007/s00145-004-0142-y>
- [3] M. Lanzagorta, Quantum Radar. Cham: Springer International Publishing, 2012.
- [4] A. Karsa, “Quantum Target Detection”, Tesis doctoral, Universidad de York, Inglaterra, 2021.
- [5] K. Hoel, “Radartutorial”, Dipl.-Ing. (FH) Christian Wolff. [En línea]. Disponible en: <https://www.radartutorial.eu/07.waves/Waves%20and%20Frequency%20Ranges.en.html>.
- [6] S. M. de Emisiones Electromagnéticas. y N. De emisiones, “ESTÁNDARES Y NORMATIVAS DE EMISIONES”, Upm.es. [En línea]. Disponible en: [https://www.etsist.upm.es/estaticos/catedra-coitt/web\\_salud\\_medioamb/documentos/transparencia\\_curso\\_emisionesCOIT\\_T\\_2\\_06-s.pdf](https://www.etsist.upm.es/estaticos/catedra-coitt/web_salud_medioamb/documentos/transparencia_curso_emisionesCOIT_T_2_06-s.pdf).
- [7] F. Pérez Martínez et al., “INFORME SOBRE EMISIONES ELECTROMAGNÉTICAS DE LOS SISTEMAS DE TELEFONÍA MÓVIL Y ACCESO FIJO INALÁMBRICO”, Gob.es. [En línea]. Disponible en: [https://avancedigital.mineco.gob.es/inspeccion-telecomunicaciones/niveles-exposicion/DocumentacionOtros/Colegio%20Oficial%20Ingenieros%20de%20Telecomunicaci%C3%B3n%20\(COIT\)/2001\\_COIT\\_EfectosSaludExposicionCEM\\_InformeNormativa.pdf](https://avancedigital.mineco.gob.es/inspeccion-telecomunicaciones/niveles-exposicion/DocumentacionOtros/Colegio%20Oficial%20Ingenieros%20de%20Telecomunicaci%C3%B3n%20(COIT)/2001_COIT_EfectosSaludExposicionCEM_InformeNormativa.pdf).

- [8] “BOE-A-2010-6485 Real Decreto 486/2010, de 23 de abril, sobre la protección de la salud y la seguridad de los trabajadores contra los riesgos relacionados con la exposición a radiaciones ópticas artificiales”, Boe.es. [En línea]. Disponible en: <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2010-6485>.
- [9] S. Lloyd, “Enhanced sensitivity of photodetection via quantum illumination”, *Science*, vol. 321, núm. 5895, pp. 1463–1465, 2008.
- [10] S. Tan, “Quantum State Discrimination with bosonic Channels and Gaussian States”, Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de Massachusetts, Cambridge, MA, 2010.
- [11] Z. Zhang, S. Mouradian, F. N. C. Wong, and J. H. Shapiro, “Entanglement-enhanced sensing in a lossy and noisy environment,” *arXiv [quant-ph]*, 2015.
- [12] D. G. England, B. Balaji, and B. J. Sussman, “Quantum-enhanced standoff detection using correlated photon pairs,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 023828, 2019.
- [13] S. Barzanjeh, S. Pirandola, D. Vitali, y J. M. Fink, “Microwave quantum illumination using a digital receiver”, *arXiv [quant-ph]*, 2019.
- [14] G. Sorelli, N. Treps, F. Grosshans, and F. Boust, “Detecting a target with quantum entanglement,” *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.*, vol. 37, no. 5, pp. 68–90, 2022.
- [15] S. Barzanjeh, S. Guha, C. Weedbrook, D. Vitali, J. H. Shapiro, y S. Pirandola, “Microwave Quantum Illumination”, *arXiv [quant-ph]*, 2015.
- [16] Q. Cai, J. Liao, B. Shen, G. Guo, y Q. Zhou, “Microwave quantum illumination via cavity magnonics”, *Phys. Rev. A (Coll. Park.)*, vol. 103, núm. 5, 2021.
- [17] L. Susskind y A. Friedman, *Quantum Mechanics*. Nueva York: Basic books, 2014.
- [18] D. A. Fleisch, *A student’s guide to the Schrödinger equation*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 2020.
- [19] U. Leonhardt, *Essential quantum optics: From quantum measurements to black holes*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 2010.

- [20] R. Loudon, The quantum theory of light, 3a ed. Londres, Inglaterra: Oxford University Press, 2000.
- [21] P. Dirac, The principles of quantum mechanics, 4a ed. Oxford, Inglaterra: Clarendon Press, 1981.
- [22] C. Weedbrook et al., “Gaussian quantum information,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 84, no. 2, pp. 621–669, 2012.
- [23] K. Lukin, “Evolution of quantum radar concept to noise radar concept”, *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.*, vol. 35, núm. 11, pp. 30–36, 2020.
- [24] M. Lanzagorta and J. Uhlmann, “Opportunities and Challenges of Quantum Radar,” *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.*, vol. 35, no. 11, pp. 38–56, 2020.
- [25] S. Guha and B. I. Erkmen, “Gaussian-state quantum-illumination receivers for target detection,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, no. 5, 2009.
- [26] S. H. Tan et al., “Quantum illumination with Gaussian states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, no. 25, p. 253601, 2008.
- [27] J. N. Blakely, “Bounds on probability of detection error in quantum-enhanced noise radar,” *Quantum rep.*, vol. 2, no. 3, pp. 400–413, 2020.
- [28] “1. Por coeficientes de amortización lineal”, Gob.es. [En línea]. Disponible en: <https://sede.agenciatributaria.gob.es/Sede/ayuda/manuales-videos-folletos/manuales-practicos/irpf-2020/capitulo-7-rendimientos-actividades-economicas-directa/fase-1-determinacion-rendimiento-neto/amortizaciones-dotaciones-ejercicio-fiscalmente-deducibles/requisitos-generales/coeficientes-amortizacion-lineal.html>.



## ANEXOS

### Anexo A.

Cálculo de la matriz de covarianza del estado *return-idler*  $\hat{\rho}_{RI}^{(0)}$  bajo la hipótesis  $H_0$

$$V_{11} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{q}_T, \hat{q}_T\} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_T \hat{q}_T + \hat{q}_T \hat{q}_T \rangle = \frac{1}{2} \langle 2\hat{q}_T^2 \rangle = \langle \hat{q}_T^2 \rangle = Tr(\hat{q}_T^2 \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{N_S}) \quad (A.1)$$

Aplicando la propiedad  $Tr(A \otimes B) = Tr(A) \times Tr(B)$

$$V_{11} = Tr(\hat{q}_T^2 \hat{\rho}_{N_T}) \times Tr(\hat{\rho}_{N_S}) \quad (A.2)$$

La traza de una matriz de densidad debe ser igual a uno,  $Tr(\hat{\rho}_{N_S}) = 1$ , por lo que

$$V_{11} = Tr(\hat{q}_T^2 \hat{\rho}_{N_T}) = 2N_T + 1 \quad (A.3)$$

Aplicando el mismo proceso con el resto de operadores de cuadratura se obtienen los siguientes resultados:

$$V_{22} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{p}_T, \hat{p}_T\} \rangle = \langle \hat{p}_T^2 \rangle = Tr(\hat{p}_T^2 \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{N_S}) = 2N_T + 1 \quad (A.4)$$

$$V_{33} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{q}_I, \hat{q}_I\} \rangle = \langle \hat{q}_I^2 \rangle = Tr(\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{q}_I^2 \hat{\rho}_{N_S}) = 2N_S + 1 \quad (A.5)$$

$$V_{44} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{p}_I, \hat{p}_I\} \rangle = \langle \hat{p}_I^2 \rangle = Tr(\hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{p}_I^2 \hat{\rho}_{N_S}) = 2N_S + 1 \quad (A.6)$$

## Anexo B.

Cálculo de los operadores de cuadratura del modo *return-idler*  $\hat{\rho}_{RI}^{(1)}$  bajo la hipótesis  $H_1$

Sabiendo que  $\hat{a}_R = \sqrt{\kappa}\hat{a}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{a}_T$ ,  $\hat{q}_i = \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger$  y  $\hat{p}_i = i(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i)$

$$\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{q}_R \\ \hat{p}_R \\ \hat{q}_I \\ \hat{p}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger \\ i(\hat{a}_R^\dagger - \hat{a}_R) \\ \hat{q}_I \\ \hat{p}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{\kappa}\hat{a}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{a}_T) + (\sqrt{\kappa}\hat{a}_S^\dagger + \sqrt{1-\kappa}\hat{a}_T^\dagger) \\ i\left((\sqrt{\kappa}\hat{a}_S^\dagger + \sqrt{1-\kappa}\hat{a}_T^\dagger) - (\sqrt{\kappa}\hat{a}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{a}_T)\right) \\ \hat{q}_I \\ \hat{p}_I \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{x} := \begin{bmatrix} \sqrt{\kappa}(\hat{a}_S + \hat{a}_S^\dagger) + \sqrt{1-\kappa}(\hat{a}_T + \hat{a}_T^\dagger) \\ i\sqrt{\kappa}(\hat{a}_S^\dagger - \hat{a}_S) + i\sqrt{1-\kappa}(\hat{a}_T^\dagger - \hat{a}_T) \\ \hat{q}_I \\ \hat{p}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\kappa}\hat{q}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{q}_T \\ \sqrt{\kappa}\hat{p}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{p}_T \\ \hat{q}_I \\ \hat{p}_I \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$



## Anexo C.

Cálculo de la matriz de covarianza del estado *return-idler*  $\hat{\rho}_{RI}^{(1)}$  bajo la hipótesis  $H_1$

Comenzando con los elementos de la diagonal principal y sabiendo que  $\hat{q}_R = \sqrt{\kappa}\hat{q}_S + \sqrt{1-\kappa}\hat{q}_T$

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{1}{2} \langle \{\hat{q}_R, \hat{q}_R\} \rangle = \langle \hat{q}_R^2 \rangle = \\ &= Tr \left( \left( \kappa \hat{q}_S^2 + (1-\kappa) \hat{q}_T^2 + 2\sqrt{\kappa(1-\kappa)} \hat{q}_S \hat{q}_T \right) \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{TMSV} \right) = \end{aligned} \quad (C.1)$$

Aplicando la propiedad  $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$  y aplicando los operadores a sus estados correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} V_{11} &= Tr(\hat{\rho}_{N_T} \otimes \kappa \hat{q}_S^2 \hat{\rho}_{TMSV}) + Tr((1-\kappa) \hat{q}_T^2 \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{\rho}_{N_S}) \\ &\quad + Tr(2\sqrt{\kappa(1-\kappa)} \hat{q}_T \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{q}_S \hat{\rho}_{TMSV}) = \end{aligned} \quad (C.2)$$

Por último, aplicando la propiedad  $Tr(A \otimes B) = Tr(A) \times Tr(B)$

$$\begin{aligned} V_{11} &= Tr(\hat{\rho}_{N_T}) Tr(\kappa \hat{q}_S^2 \hat{\rho}_{TMSV}) + Tr((1-\kappa) \hat{q}_T^2 \hat{\rho}_{N_T}) Tr(\hat{\rho}_{TMSV}) \\ &\quad + Tr(2\sqrt{\kappa(1-\kappa)} \hat{q}_T \hat{\rho}_{N_T}) Tr(\hat{q}_S \hat{\rho}_{TMSV}) = 2\kappa N_S + 2N_T + 1 \end{aligned} \quad (C.3)$$

El elemento  $V_{22}$  es igual al  $V_{11}$  y los elementos  $V_{33}$  y  $V_{44}$  se mantienen igual que en el caso de la hipótesis  $H_0$

$$V_{11} = V_{22} = 2\kappa N_S + 2N_T + 1 \quad (C.4)$$

$$V_{33} = V_{44} = 2N_S + 1 \quad (C.5)$$

Continuando con los elementos fuera de la diagonal principal

$$\begin{aligned} V_{13} &= \frac{1}{2} \langle \{\hat{q}_R, \hat{q}_I\} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_R \hat{q}_I + \hat{q}_I \hat{q}_R \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle (\sqrt{\kappa} \hat{q}_S + \sqrt{1-\kappa} \hat{q}_T) \hat{q}_I + \hat{q}_I (\sqrt{\kappa} \hat{q}_S + \sqrt{1-\kappa} \hat{q}_T) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \sqrt{\kappa} \hat{q}_S \hat{q}_I + \sqrt{1-\kappa} \hat{q}_T \hat{q}_I + \sqrt{\kappa} \hat{q}_I \hat{q}_S + \sqrt{1-\kappa} \hat{q}_I \hat{q}_T \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[ Tr(\sqrt{\kappa} \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{q}_S \hat{q}_I \hat{\rho}_{TMSV}) + Tr(\sqrt{1-\kappa} \hat{q}_T \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{q}_I \hat{\rho}_{TMSV}) \right. \\ &\quad \left. + Tr(\sqrt{\kappa} \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{q}_I \hat{q}_S \hat{\rho}_{TMSV}) + Tr(\sqrt{1-\kappa} \hat{q}_T \hat{\rho}_{N_T} \otimes \hat{q}_I \hat{\rho}_{TMSV}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\kappa} Tr(\hat{\rho}_{N_T}) Tr(\hat{q}_S \hat{q}_I \hat{\rho}_{TMSV}) + \sqrt{\kappa} Tr(\hat{\rho}_{N_T}) Tr(\hat{q}_I \hat{q}_S \hat{\rho}_{TMSV}) \right] = \end{aligned} \quad (C.6)$$

Como los operadores de cuadratura de distintos modos conmutan, se pueden sumar ambos términos asumiendo que  $\hat{q}_S \hat{q}_I = \hat{q}_I \hat{q}_S$

$$V_{13} = \frac{1}{2} 2\sqrt{\kappa} \text{Tr}(\hat{\rho}_{N_T}) \text{Tr}(\hat{q}_S \hat{q}_I \hat{\rho}_{TMSV}) = 2\sqrt{\kappa} \sqrt{N_s(N_s + 1)} = \sqrt{\kappa} C_q \quad (\text{C.7})$$

Siguiendo el mismo proceso se obtiene  $V_{24} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{p}_R, \hat{p}_I\} \rangle = -\sqrt{\kappa} C_q$ .